不完全情報ゲーム「ヨンオクロック」の必勝・必敗解析

高峰 裕輝[1]　本吉 真大[1]　保木 邦仁[1]

概要：ヨンオクロックは、相手の手ゴマが公開される一方、自分の次に置く駒以外の手ゴマの色が分からない 2 人不完全情報ゲームである。本研究では、配置に基づく belief state の勝敗データベースを構築し、必勝・必敗の決着手数を記録するとともに、初期配置からの到達可能性を順方向に解析する。白視点の初期配置 32 通りのうち 9 通りに白必勝ラベルが付き、保証勝利手数は 11 手が 1 通り、13 手が 5 通り、15 手が 3 通りであった。11 手必勝の初期配置について、3 手目に目指す配置と相手の応答による勝利手数の変化を考察した。また、到達可能かつ非終端の配置総数は白視点 110,980,668,966、黒視点 108,858,440,174 であった。さらに、到達可能配置をロックされた白駒・黒駒の数で分類し、各分類の配置数と必勝配置数を集計するプログラムを作成した。解析・到達可能性判定・集計の実装を整理して公開し、ロックされた駒の色と手番によって必勝割合が大きく異なることを明らかにした。

Forced-Win and Forced-Loss Analysis of 4OQU-LOCK

Yuki Takamine[1]　Makoto Motoyoshi[1]　Kunihito Hoki[1]

Abstract: 4OQU-LOCK is a two-player imperfect-information game in which a player can see the opponent's reserve pieces but cannot see their own reserve sequence beyond the next piece. We construct a database of position-based belief states, record distances to forced wins and losses, and construct a forward reachability database. Nine of the 32 initial positions from White's perspective are labelled forced wins, with guaranteed winning distances of 11 plies for one position, 13 plies for five positions, and 15 plies for three positions. We examine the unique initial position with an 11-ply forced win through its third-ply targets and Black's responses. There are 110,980,668,966 reachable nonterminal positions from White's perspective and 108,858,440,174 from Black's. Terminal positions are included in the ZDD enumeration and outcome databases but excluded from these statistics. We also implement statistics of reachable and forced-win positions classified by the numbers of locked white and black pieces, and release the source code. The results reveal substantial differences in forced-win proportions depending on the colors of locked pieces and the player to move.

1. はじめに

ゲームの勝敗解析は、双方が最適に行動した場合の結果と、その結果を実現する行動を明らかにする研究である。完全情報ゲームでは、大規模探索と終盤データベースを組み合わせる手法が成果を挙げている。Schaeffer らはチェッカーの初期配置が引分であることを示した [1]。その解析を支える終盤データベースの構築では、配置の索引付けと圧縮により膨大な結果を保存・照会する方法が研究された [2]。オセロについても、Takizawa は双方が最適にプレイした場合に初期配置が引分となると報告している [3]。

不完全情報ゲームでは、意思決定者が現在の物理状態を一意に特定できないため、物理状態ごとに求めた最善手をそのまま実行できない。例えば、同じ観測に対応する複数の状態で最善手が異なっても、プレイヤは見えない情報を条件に行動を選べない。この情報制約を扱う表現として、観測と矛盾しない状態の集合である belief state が用いられる [4]。Russell らは belief state に対する AND–OR 探索を Kriegspiel に適用し、非公開情報の候補をまとめた勝利保証の探索を行った [5]。

一方、田中は同時手番のカードゲーム R-Rivals の全状態

[1] 電気通信大学大学院情報理工学研究科
Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications

© 2026 Information Processing Society of Japan

のゲーム値を計算し、混合戦略によるナッシュ均衡戦略を求めた [6]。勝利を保証する行動計画の判定と、混合戦略を含む均衡戦略の計算は、情報構造と求める結論に応じて区別する必要がある。

相手の盤上の駒種が分からないガイスターでも、必勝配置を利用した解析が行われている。末續らは必勝局面を利用する敵駒推定を提案した [7]。また、清水の修士論文 [8] および高峰らの研究 [9] では、配置に基づく belief state に対する勝敗ラベルを終盤から伝播し、終盤データベースを構築した。これに対し、ヨンオクロックは相手の手ゴマの並びが公開される一方、自分の次に置く駒以外の手ゴマが非公開である。相手の状態を知らないゲームに用いられた勝利保証の考え方を、自分の将来の供給駒を知らないゲームに適用する点に特徴がある。

大きな配置集合を表す方法として、ゼロサプレス型二分決定グラフ（ZDD）を用いた整数化がある。山本らは NOCCA×NOCCA の強解決 [10] で、三納らはバックギャモンの終盤データベース拡張 [11] で ZDD を用いた。本研究も ZDD による整数 ID を勝敗表と到達可能性表で共有する。ヨンオクロックでは着手ごとに手ゴマが 1 個減り、プレイは最大 16 手で終わるため、手数層を逆順に解析できる。

本研究では、同ゲームの擬到達可能配置を列挙し、配置に基づく行動計画に対する勝敗データベースを構築する。さらに、必勝・必敗の決着手数を保存し、初期配置の最短保証勝利手数と行動計画を考察する。初期配置からの順方向解析によって実際の到達可能配置を区別し、ロックされた白駒・黒駒の数ごとの配置数と必勝配置数を調べる。あわせて解析・照会・集計の実装を整理して公開する。ZDD の列挙と勝敗表は終端を含む一方、本稿の主要な集計は到達可能かつ非終端の配置に限定し、勝敗、手数、到達可能性、ロックの関係からゲームの性質を考察する。

2. ヨンオクロックのルールと解析対象

本章では、ゲームのルールと手数・配置の表現を説明し、ZDD で列挙する擬到達可能配置と実際の到達可能配置を区別する。

2.1 ヨンオクロックのルール

盤は 4×4 マスで、白駒 8 個、黒駒 8 個を用いる。各プレイヤは、自分の色 3 個と相手の色 1 個からなる 4 個のグループを 2 つ作る。各グループをシャッフルし、順序を保って連結した 8 個を手ゴマとする。相手には手ゴマの並び全体を見せ、自分には次に置く駒だけを公開する。以下、先手を白プレイヤ、後手を黒プレイヤと呼ぶ。駒の色と所有プレイヤは異なる概念であり、どちらのプレイヤも白駒と黒駒を盤上に置く。

各手番では次の手ゴマを空きマスに置く。3 手目以降は、

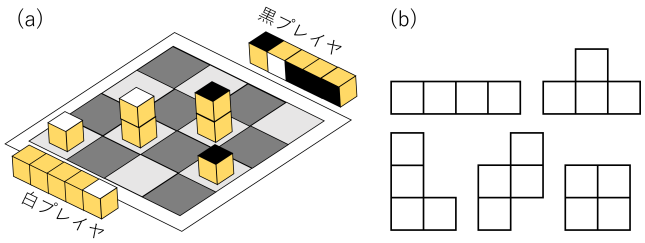


図 1 ヨンオクロックの概要。(a) 配置例。(b)5 種類のテトロミノ。

置いた駒以外の盤上の駒 1 個を縦横に 1 マス移動させることもできる。移動を省略することもでき、動かす駒の色は手番プレイヤの色に限定されない。移動先に 1 個の駒がある場合、その上に積むことができる。積まれた上下 2 個は以後移動できず、3 段以上には積めない。この固定化をロックと呼ぶ。盤上の駒と手ゴマの例を図 1(a) に示す。

自分の色の駒で縦横につながる 4 マスのテトロミノを形成すると勝利する。テトロミノには図 1(b) の 5 種類があり、回転・反転した形も認められる。配置操作と移動操作の途中で勝利条件を満たした場合には、先に成立した勝利を採用する。16 個を出し終えても勝者が決まらなければ引分となる。

2.2 手数と配置の区別

初期配置を $t = 0$ とし、両プレイヤ合わせて t 回の着手が終了した配置を t 手後の配置とする。t が偶数なら白手番、奇数なら黒手番である。「3 手目の配置」は、3 回目の着手後、すなわち $t = 3$ の配置を指す。勝利までの手数は両プレイヤの着手をそれぞれ 1 手と数え、自分の着手回数だけを数えるものではない。

第三者から見た物理状態は、盤上の駒と両プレイヤの手ゴマの並びをすべて含む。プレイヤ視点の配置は、自分の次の駒以外の手ゴマを非公開にした表現である。ZDD が列挙する擬到達可能配置と勝敗表は終端も含む。これに対し、結果のラベル分布とロック駒別集計は、初期配置から到達可能で、かつまだ勝利条件が成立していない非終端配置に限定する。配置数は視点ごとに数え、物理状態数やプレイ履歴数とは区別する。

2.3 擬到達可能配置

本研究では、初期配置から到達するための必要条件を満たす配置を擬到達可能配置と呼ぶ。主な条件は、白黒各 8 個の駒が手ゴマまたは盤上に存在すること、盤上の重なりが 2 段以下であること、手ゴマの各グループが元の 3 対 1 の色の構成と矛盾しないこと、および白の残り手ゴマ数が黒と等しいか 1 個少ないことである。未使用の後半グループは 4 個を保つ。

この集合は到達可能配置を包含するが、逆は成り立たない。例えば、最初の 2 手では移動できないため、2 個しか

© 2026 Information Processing Society of Japan

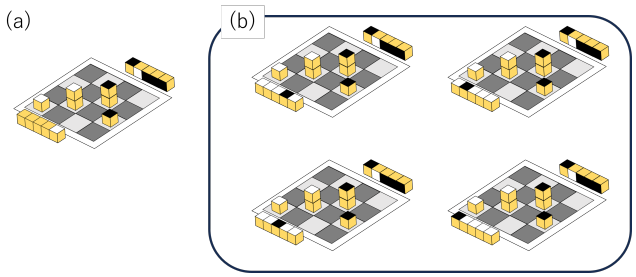


図 2 (a) 白視点の配置。(b) 対応する belief state。

盤上にない時点で 2 段積みを持つ配置には到達できない。また、局所的な駒数条件を満たしても、過去に勝利条件が成立してプレイが終了する場合には、その後の配置へ進めない。したがって、静的な配置列挙と、終端で停止するプレイからの到達可能性判定は別の処理である。

3. belief state と勝敗ラベル

本章では、プレイヤが観測できる情報を belief state で表し、配置に基づく行動計画と勝敗ラベルを定義する。

3.1 配置に基づく行動計画

プレイヤを $p \in \{W, B\}$ とし、その相手プレイヤを $\bar{p}$ とする。p から見た配置を x_p とし、その配置と矛盾しない物理状態の集合を $\mathrm{BS}(x_p)$ とする。自分の非公開手ゴマの並びが異なる状態が同じ集合に含まれる。図 2(a) に白視点の配置、図 2(b) に対応する belief state を示す。本研究の belief state は現在の配置から定める集合であり、過去の相手の行動から推測される情報まで常に保持するものではない。

行動計画 s_p は、プレイヤ p の手番における p 視点の各配置に対して合法な次の行動を割り当てる関数である。同じ視点配置では、同じ行動を選ばなければならない。実際には見えない手ゴマの色ごとに異なる行動を選ぶ計画は認めない。行動計画の集合を S_p とする。物理状態 z と両者の行動計画が定まると、以降のプレイと終端が定まる。白の利得 $R_z(s_W, s_B)$ を白勝ちなら 1、黒勝ちなら -1、引分なら 0 とする。

3.2 必勝と必敗

白視点の配置 x_W が白必勝 (黒必敗) であるとは、白の行動計画が存在し、白に見えない手ゴマの並びと黒の行動計画が何であっても白が勝てることである。すなわち、

$$\exists s_W \in S_W \ \forall z \in \mathrm{BS}(x_W) \ \forall s_B \in S_B : \quad R_z(s_W, s_B) = 1. \tag{1}$$

黒視点の黒必勝も色を入れ替えて定義する。ここで存在量化される計画は、belief state に含まれるすべての物理状態で共通して実行可能な計画である。

白視点の白必敗（黒必勝）は単に式 1 が成立しないことではない。π_B を黒視点への射影とする。白が x_W において可能と考える各物理状態 z に対応する、黒の手ゴマが見えない黒視点の配置 $\pi_B(z)$ が黒必勝である場合を白必敗とする。すなわち、

$$\begin{aligned} &\forall z \in \mathrm{BS}(x_W) \ \exists s_B \in S_B \\ &\forall \hat{z} \in \mathrm{BS}(\pi_B(z)) \ \forall s_W \in S_W : \\ &R_{\hat{z}}(s_W, s_B) = -1. \end{aligned} \tag{2}$$

黒の計画は対応する黒視点配置ごとに選択されるが、その黒視点配置内では非公開情報によらない計画でなければならない。手番が白でも黒でも同じ量化の趣旨を用いる。この定義は、相手が把握している情報の下でも勝利を保証できることを要求する。したがって、ある物理状態が白視点で白必勝でも、その状態を含む黒視点の配置が黒必敗になるとは限らない。

3.3 その他のラベルと解析の範囲

白視点の白負無し（黒勝無し）は、式 1 の利得条件を $R_z \neq -1$ に置き換えた性質である。白視点の白勝無し（黒負無し）は、式 2 の利得条件を $R_{\hat{z}} \neq 1$ に置き換えた性質である。負無しと勝無しの両方が成り立つ場合を必引分とする。必勝は負無しに、必敗は勝無しに含まれる。集計では強いラベルを優先し、必勝、必敗、必引分、負無しのみ、勝無しのみ、不明の互いに重ならない区分を用いる。

判定では、必敗は各物理状態に対応する相手視点の必勝を要求する。負無しは共通の行動による全状態での敗北回避を要求し、相手手番では全応答を調べる。勝無しは対応する相手視点での敗北回避を要求する。不明は、これらの解析規則によって強い結論が得られなかった配置であり、引分を意味しない。また、本研究は配置に基づく行動計画を対象とし、履歴に基づく全戦略の均衡利得を計算したものではない。結果の解釈にはこの制約を保つ必要がある。

4. 解析方法

本章では、ZDD による配置の整数化、勝敗と決着手数の後退伝播、および到達可能性とロック駒数の集計方法を説明する。

4.1 ZDD による配置の整数化

ゼロサプレス型二分決定グラフ（ZDD）は、アイテムの組合せ集合を非巡回有向グラフとして表現する。1 枝が 0 葉に向かう節点を削除する規則と、等価な部分グラフを共有する規則により圧縮する。ゲームの配置をアイテムの組合せで表すことで、大きな配置集合を列挙できる [10]。

本研究では、手ゴマ位置と盤上の各マスに状態を割り当てる。盤上のマスは、空、白 1 個、黒 1 個、および上下の色の組合せによる 4 通りの 2 段積みを合わせた 7 状態を取る。各手数・視点について ZDD を構築し、部分グラフが

© 2026 Information Processing Society of Japan

表す配置数を用いて、配置と整数 ID を相互変換する。同じ ID を勝敗表と到達可能性表で共有するため、両表の照合時に文字列の配置表現を比較する必要はない。

4.2 勝敗と決着手数の後退伝播

手ゴマの総数は着手ごとに 1 個減る。そのため、配置の遷移は t 層から $t+1$ 層へ進み、同じ手数層への循環はない。終端または残り手数の少ない配置から逆順に処理し、子のラベルから親のラベルを決定する。不完全情報下では、物理状態ごとの最善手をそのまま採用するのでなく、同じ視点配置内で行動が共通であるという条件を課す。

例えば、白手番で白必勝を判定するとき、ある行動が存在し、belief state 内のすべての状態で、その行動後が白勝ちの終端または白必勝の子であれば、親に白必勝を付けられる。黒手番の白必勝では、相手が取り得る継続をすべて考える。自視点だけで保証を得られない場合には、相手視点の子が持つ必敗ラベルから自分の勝利を保証する規則も用いる。アルゴリズム 1 に必勝判定と勝利手数の計算を示す。

本研究では、必勝または必敗を付けた配置に決着までの手数 d を保存する。終端の残り手数は 0 とし、子への遷移では 1 を加える。必勝手数は、勝者が勝利を早め、敗者と非公開手ゴマの並びが勝利を遅らせると考える。白必勝の概念上の目標値は、式 1 を満たす計画集合 $S_W^{\mathrm{win}}(x_W)$ と終端までの着手数 T_z を用いて、

$$d_W(x_W) = \min_{s_W \in S_W^{\mathrm{win}}(x_W)} \max_{z \in \mathrm{BS}(x_W),\, s_B \in S_B} T_z(s_W, s_B) \tag{3}$$

と表せる。白手番では勝利を保証する行動の中で最小値を選び、黒手番では保証対象となる応答の最大値を取る。見えない手ゴマにより複数の子が生じる場合も最大値を取る。必敗では勝敗の役割を逆にし、相手が勝利を早め、視点プレイヤが敗北を遅らせる規約を用いる。

ただし実装では、本研究のラベル伝播規則によって勝利または敗北を保証できる子の配置のラベルと決着手数を用いて、親の配置のラベルと決着手数を計算する。手数を持たない負無し・勝無し・不明には、決着手数の意味を与えない。

子 y を視点 p へ射影したラベル・手数を $(L_p(y), d_p(y))$ とする。判定に用いる子の視点を k で指定し、$k=0$ では自視点の $L_p(y)=\mathrm{FW}$ を、$k=1$ では相手視点の $L_{\bar{p}}(y)=\mathrm{FL}$ を勝利の証明に用いる。各行動について、判定に用いる子の視点を固定し、全物理状態を検査する。$\bot$ はこの規則では必勝を保証できないことを表し、必敗を意味しない。

相手手番では、全行動を保証できる子の視点が少なくとも 1 つ必要である。手数は公開実装に合わせ、勝利を保証できた行動と子の視点に対応する手数の最大値を保存する。自手番では証明できた行動の最小値を選ぶため、子のラベルだけでなく手数も同時に必要となる。

アルゴリズム 1：必勝判定と勝利手数

```
1  procedure WinDistance(x, p)
2    if Terminal(x) then
3      return 0 if Winner(x) = p else ⊥
4    A ← Actions(x); H ← BS(x)
5    for k ∈ {0,1} do                    ▷ 判定に用いる子の視点
6      for a ∈ A do
7        D_k(a) ← ⊥; C ← ∅
8        for z ∈ H do
9          y ← Apply(z, a)
10         if Terminal(y) then
11           c ← 1 if Winner(y) = p else ⊥
12         else if k = 0 ∧ L_p(y) = FW then
13           c ← 1 + d_p(y)                ▷ 自視点の必勝
14         else if k = 1 ∧ L_p̄(y) = FL then
15           c ← 1 + d_p̄(y)                ▷ 相手視点の必敗
16         else c ← ⊥
17         C ← C ∪ {c}
18       if ⊥ ∉ C then D_k(a) ← max C
19   V ← {D_k(a) | k ∈ {0,1}, a ∈ A, D_k(a) ≠ ⊥}
20   if Turn(x) = p then                 ▷ 自手番
21     return min V if V ≠ ∅ else ⊥
22   if ∃k ∀a ∈ A : D_k(a) ≠ ⊥ then
23     return max V                      ▷ 相手の全応答を保証
24   return ⊥                            ▷ この規則では保証できない
```

4.3 保存形式

公開実装では、$0 \le t \le 12$ の勝敗表を 1 エントリ 8 ビットとし、ラベル 3 ビットと手数 5 ビットを格納する。$13 \le t \le 15$ では残り手数が 3 以下であり、1 エントリ 4 ビット（ラベル 2 ビット、手数 2 ビット）を用いる。この終盤では各プレイヤの残り手ゴマの色を確定でき、完全情報の勝ち・負け・引分として扱える。到達可能性表は 1 エントリ 1 ビットである。

表は手数と視点で分割して保存し、読み込み時にサイズとヘッダを確認する。

4.4 順方向の到達可能性解析

t 手後の p 視点の擬到達可能配置集合を $P_{p,t}$ とし、到達可能性ビットを $r_{p,t}(i)$ とする。初期配置の ID に 1 を設定し、他を 0 で初期化する。t 層の到達可能な配置を取り出し、合法手と非公開手ゴマの可能な並びを列挙する。各子を同じ視点の配置へ射影して ID に戻し、$t+1$ 層の対応ビットを 1 にする。複数の親や行動から同じ子に到達しても 1 回だけ数える。

ここで到達可能とは、少なくとも 1 つの合法なプレイでその視点配置が現れることである。その belief state に含

© 2026 Information Processing Society of Japan

まれる全物理状態が同じ履歴から到達することは要求しない。また、到達可能性は最善手だけでなく、すべての合法手を対象とする。履歴で絞り込んだ情報集合を列挙する処理とは異なる。

各層では終端への到達も記録するが、勝利条件を満たした親からの継続を認めない。集計時には到達可能性ビットが 1 の配置を復元し、終端判定により終端を除外する。したがって、終端を含めることと、ゲーム終了後に任意の配置まで進めることは異なる。本ゲームでは、未使用手ゴマの並びが非公開情報であり、グループ内の色数制約と公開された次の駒を用いて候補を列挙する。

4.5 ロック駒数による分類

ルール上は 2 段積みの上下両方が移動不能になる。本集計では、重なりによって下側でロックされた白駒数を ℓ_W、黒駒数を ℓ_B とする。この定義は公開実装の集計関数と一致し、$\ell_W + \ell_B$ は 2 段積みのマス数に等しい。以下の「ロック駒数」はこの下側の駒数を意味し、上側を含む移動不能駒の総数とは区別する。

非終端の指示関数を $u(x) = [x \text{ は非終端}]$ とし、$q_{p,t}(x) = r_{p,t}(x)u(x)$ と置く。視点 p、手数 t、ロック駒数 (a, b) ごとの到達可能かつ非終端の配置数と必勝配置数を、

$$N_{p,t}(a,b) = \sum_{x \in P_{p,t}} q_{p,t}(x)\,[\ell_W(x) = a, \ell_B(x) = b], \quad (4)$$

$$F_{p,t}(a,b) = \sum_{x \in P_{p,t}} q_{p,t}(x)\,[L_p(x) = \mathrm{FW}] \cdot [\ell_W(x) = a, \ell_B(x) = b] \quad (5)$$

と定める。$[\cdot]$ は条件が真なら 1、偽なら 0 を取る指示関数である。L_p は視点プレイヤのラベルであり、黒視点では黒必勝を数える。$N_{p,t}(a,b) > 0$ のとき、必勝割合を $F_{p,t}(a,b)/N_{p,t}(a,b)$ とする。$N_{p,t}(a,b) = 0$ の分類には割合を定義せず、到達する配置がない分類と集計値が存在しない分類を区別する。

4.6 実装の公開

プログラムは `https://github.com/yuki1216x-arch/4OQU-LOCK` で公開している（図 3）。共通の配置表現と ZDD の ID を基盤とし、勝敗・手数の解析、到達可能性解析、配置照会、ロック数別集計を機能ごとに整理した。実行用スクリプトも公開し、配置 ID からラベル・保証手数・到達可能性を照合できるようにした。

5. 結果と考察

本章では、実験環境と勝敗ラベルの分布を示し、初期配置の勝利手数、到達可能配置数、およびロック駒の色・数と必勝割合の関係を考察する。

図 3 実装の URL の QR コード。

5.1 実験環境

解析には Rocky Linux 8.10 (Green Obsidian)、カーネル 4.18.0-553.158.1.el8_10.x86_64 の計算機を使用した。CPU は AMD EPYC 7543 32-Core Processor を 2 ソケット搭載し、各ソケット 32 物理コア、1 コアあたり 1 スレッドで、論理 CPU 数は 64 である。メモリは 251 GiB、コンパイラは GCC 8.5.0 である。公開実装は C++14 を用い、Makefile では最適化オプション `-O2` を指定する。

5.2 配置数と勝敗ラベルの分布

表 1 に、到達可能かつ非終端の配置のラベル内訳を示す。「引分」は必引分、「勝無」「負無」はそれぞれ勝無しのみ、負無しのみを表す。これらは未決着の配置に対する保証の区分である。ZDD と勝敗表自体は終端も含むが、到達可能性判定と終端判定によって集計対象を絞る。手数 t は着手済み回数であり、初期配置は $t = 0$ に対応する。

初期配置は各視点 32 通りで、白視点では 9 通り（28.125%）に白必勝が付いた。黒視点では黒必勝は 0 通り、黒必敗は 4 通り、黒負無しは 1 通り、不明は 27 通りであった。白視点の白必勝 9 通りと黒視点の黒必敗 4 通りは同じ数にならない。この非対称性は、各プレイヤが自分の手ゴマの一部を知らず、相手視点では異なる物理状態が 1 つの belief state にまとめられることによる。

$t = 12$ 以降では不明・勝無しのみ・負無しのみが 0 となり、視点による勝敗の非対称性が解消される。すなわち、黒視点と白視点で数が等しい。

5.3 初期配置の必勝手数と行動計画

白視点で白必勝となった初期配置 9 通りの保証勝利手数は、11 手が 1 通り、13 手が 5 通り、15 手が 3 通りであった。最短は 11 手であり、白の 6 回目の着手までに勝利を保証できる。保証手数は、黒が最も長く抵抗し、非公開手ゴマの並びも最も不利な場合を含む。以下では、唯一の 11 手必勝配置の行動計画を考察する。

図 4 では、白の最初の手ゴマが黒なので、同じ最初の 4 個グループの残り 3 個は白と分かる。非公開な手ゴマが残っていても、グループの色数制約によって序盤の供給駒を確定できる。この初期配置では、白は 1 手目に黒駒を盤の隅へ置き、黒の 2 手目を観測した後、3 手目に図 5 のいずれかを目指す。(a)、(b) では、白が 5 手目と 7 手目に出す白駒でテトロミノを完成させることを黒は阻止できない。

© 2026 Information Processing Society of Japan

表 1 到達可能かつ非終端の配置の手数・視点別ラベル数。6 区分は互いに重ならない。

t	視点	白必勝	白必敗	引分	不明	白勝無	白負無	合計
0	白	9	0	0	23	0	0	32
0	黒	4	0	0	27	1	0	32
1	白	240	0	0	528	0	0	768
1	黒	32	4	0	460	16	0	512
2	白	4,018	88	0	4,654	0	360	9,120
2	黒	96	274	0	8,732	10	8	9,120
3	白	12,396	4,064	0	84,648	96	1,196	102,400
3	黒	1,712	27,256	0	43,324	1,228	80	73,600
4	白	382,186	8,760	0	259,588	144	13,418	664,096
4	黒	99,992	35,472	0	510,448	3,848	14,336	664,096
5	白	350,860	322,768	0	2,200,632	18,280	32,324	2,924,864
5	黒	79,152	1,421,012	0	1,354,452	60,264	9,984	2,924,864
6	白	6,803,276	184,068	0	4,208,274	8,116	245,754	11,449,488
6	黒	2,635,576	809,588	0	7,696,422	99,150	208,752	11,449,488
7	白	11,269,380	24,010,500	96,296	23,751,124	573,568	812,092	60,512,960
7	黒	2,423,212	15,366,264	0	11,632,424	561,628	272,952	30,256,480
8	白	94,702,044	19,377,012	382,324	21,837,776	936,314	1,904,818	139,140,288
8	黒	81,379,424	17,415,814	369,854	37,231,420	1,099,774	1,644,002	139,140,288
9	白	149,046,576	449,637,681	4,348,652	116,205,468	10,430,035	10,084,788	739,753,200
9	黒	116,690,712	308,650,428	4,201,408	50,203,552	6,804,128	6,618,572	493,168,800
10	白	1,785,763,182	427,138,232	33,243,888	91,048,252	27,123,408	34,214,762	2,398,531,724
10	黒	1,683,237,816	363,675,054	25,365,638	257,448,831	31,777,296	37,027,089	2,398,531,724
11	白	1,373,676,984	5,083,530,608	302,499,240	89,839,404	70,182,156	23,725,376	6,943,453,768
11	黒	1,104,825,296	3,623,676,084	186,725,944	89,839,404	69,302,808	23,725,376	5,098,094,912
12	白	10,750,247,556	2,367,427,410	1,105,471,458	0	0	0	14,223,146,424
12	黒	10,750,247,556	2,367,427,410	1,105,471,458	0	0	0	14,223,146,424
13	白	2,336,466,316	16,957,234,124	2,851,306,944	0	0	0	22,145,007,384
13	黒	2,336,466,316	16,957,234,124	2,851,306,944	0	0	0	22,145,007,384
14	白	18,475,522,590	3,298,839,462	10,279,237,078	0	0	0	32,053,599,130
14	黒	18,475,522,590	3,298,839,462	10,279,237,078	0	0	0	32,053,599,130
15	白	15,288	19,571,770,728	12,690,587,304	0	0	0	32,262,373,320
15	黒	15,288	19,571,770,728	12,690,587,304	0	0	0	32,262,373,320

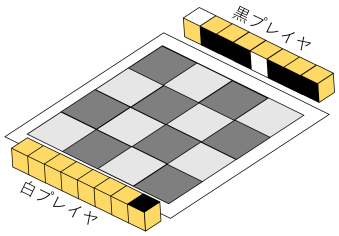


図 4 白視点で 11 手勝ちとなる唯一の初期配置。最初の手ゴマが黒なら次の 3 個は白と分かる。

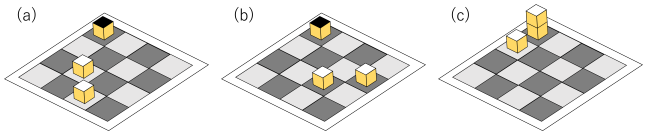


図 5 図 4 から 3 手目に白が目指す配置。(a)、(b) は通算 7 手目まで、(c) は通算 11 手目までの保証勝利に対応する。

図 5 の (c) では、勝利を 11 手目まで遅らせる黒の 4 手目の行動が 2 つ存在する。1 つは、2 個の駒があるマスの隣接マスのうち空いている方に黒駒を置き、移動を行わない行動である。もう 1 つは、2 個の駒があるマスの斜めのマスに黒駒を置き、白駒を駒のない隣接マスへ動かす行動である。それ以外の応答では、白が 5 手目と 7 手目に供給される白駒を用いてテトロミノを作ることを阻止できない。

5.4 到達可能配置数

表 2 に、終端を含む ZDD の擬到達可能配置数と、到達可能かつ非終端の配置数・必勝割合を示す。非終端到達数の合計は白視点 110,980,668,966、黒視点 108,858,440,174 であった。そのうち、必勝総数は白視点 34,984,262,901

© 2026 Information Processing Society of Japan

表 2 終端を含む ZDD 列挙数と、到達可能かつ非終端の配置数・必勝割合。

	白視点			黒視点		
t	ZDD 列挙数	非終端到達数	白必勝割合 (%)	ZDD 列挙数	非終端到達数	黒必勝割合 (%)
0	32	32	28.12	32	32	0.00
1	768	768	31.25	512	512	0.78
2	10,336	9,120	44.06	10,336	9,120	3.00
3	102,400	102,400	12.11	73,600	73,600	37.03
4	666,080	664,096	57.55	666,080	664,096	5.34
5	2,932,160	2,924,864	12.00	2,932,160	2,924,864	48.58
6	11,571,840	11,449,488	59.42	11,571,840	11,449,488	7.07
7	61,850,880	60,512,960	18.62	30,925,440	30,256,480	50.79
8	144,799,200	139,140,288	68.06	144,799,200	139,140,288	12.52
9	811,399,680	739,753,200	20.15	540,933,120	493,168,800	62.59
10	2,803,351,824	2,398,531,724	74.45	2,803,351,824	2,398,531,724	15.16
11	8,793,607,680	6,943,453,768	19.78	6,485,285,664	5,098,094,912	71.08
12	19,628,376,768	14,223,146,424	75.58	19,628,376,768	14,223,146,424	16.64
13	34,197,443,280	22,145,007,384	10.55	34,197,443,280	22,145,007,384	76.57
14	55,896,469,200	32,053,599,130	57.64	55,896,469,200	32,053,599,130	10.29
15	63,952,986,240	32,262,373,320	0.00	63,952,986,240	32,262,373,320	60.66

表 3 $t = 8$ のロック駒数別配置数と必勝配置数（到達可能かつ非終端）。

ℓ_W	ℓ_B	非終端到達数	白視点白必勝数	黒視点黒必勝数
0	0	6,341,296	5,115,928(80.68%)	251,236(3.96%)
0	1	21,030,240	19,961,012(94.92%)	53,044(0.25%)
1	0	21,030,240	11,377,856(54.10%)	3,240,740(15.41%)
0	2	13,519,440	13,423,842(99.29%)	32(0.00%)
1	1	38,438,400	28,704,160(74.68%)	1,479,784(3.85%)
2	0	13,519,440	1,733,642(12.82%)	7,232,694(53.50%)
0	3	1,638,720	1,638,720(100.00%)	0(0.00%)
1	2	10,483,200	9,293,424(88.65%)	16,212(0.15%)
2	1	10,483,200	3,013,464(28.75%)	3,340,260(31.86%)
3	0	1,638,720	1,808(0.11%)	1,509,756(92.13%)
0	4	13,656	13,656(100.00%)	0(0.00%)
1	3	232,960	220,736(94.75%)	160(0.07%)
2	2	524,160	203,076(38.74%)	90,192(17.21%)
3	1	232,960	720(0.31%)	188,048(80.72%)
4	0	13,656	0(0.00%)	13,656(100.00%)

(31.52%)、黒視点 46,526,348,974（42.74%）である。

$t = 2$ では、ZDD 列挙数 10,336 通りに対して非終端到達数は両視点とも 9,120 通りで、1,216 通りが除外された。最初の 2 手では移動できないため、2 段積みを持つ配置は到達できない。一方、$t = 3$ では除外された配置はなかった。

5.5 ロック駒数と必勝配置数

表 3 に、$t = 8$ の到達可能かつ非終端の配置のロック駒数別配置数を示す。手数を固定して盤上の駒数と手番を揃えた。$t = 8$ では複数のロック駒数を比較でき、非終端配置数も両視点で等しい。ロック駒数 ℓ_W, ℓ_B はそれぞれ、下側でロックされた白・黒の駒数である。

ロックなし $(0, 0)$ では、白必勝割合は 80.68%、黒必勝割合は 3.96%であった。黒駒のみ 1 個をロックした $(0, 1)$ では白必勝割合 94.92%、黒必勝割合 0.25%となり、2 個ロックした $(0, 2)$ では白必勝割合 99.29%、黒必勝割合はほとんど 0%であった。一方、白駒のみ 1 個をロックした $(1, 0)$ では白必勝割合 54.10%、黒必勝割合 15.41%であり、相手色の駒をロックするほど自身の必勝割合は増え、相手視点での相手の必勝割合は減る傾向がみられた。結果は表には示さないが、他の手数でもおおむね同様の傾向がみられた。

5.6 解析の範囲と今後の課題

本解析では、現在の配置から定まる belief state に対し

© 2026 Information Processing Society of Japan

て行動計画を考えた。行動履歴による非公開情報の絞り込みをすべて保持した戦略全体を解析したものではない。したがって、不明の配置が履歴を用いる戦略でも不明になるとは限らず、全初期配置の均衡利得を求めた完全解決を主張するものではない。ラベルと手数の全件独立検証、および履歴を保持した解析との比較は今後の課題である。

6. おわりに

本研究では、ヨンオクロックの配置に基づく belief state を ZDD で列挙し、勝敗と決着手数のデータベースを構築した。白視点の初期配置 32 通りのうち 9 通りに必勝が得られ、保証勝利手数は 11 手が 1 通り、13 手が 5 通り、15 手が 3 通りであった。11 手必勝の初期配置について、3 手目の目標配置と相手の抵抗手から保証手数を考察した。

また、到達可能かつ非終端の配置総数は白視点 110,980,668,966、黒視点 108,858,440,174 であった。終端を含む ZDD 列挙から集計対象を絞り、ロック駒の色による必勝割合の差を確認した。

さらに、実装を整理して公開した。

参考文献

[1] Schaeffer, J., Burch, N., Björnsson, Y., Kishimoto, A., Müller, M., Lake, R., Lu, P. and Sutphen, S.: Checkers Is Solved, Science, Vol. 317, No. 5844, pp. 1518–1522 (2007).

[2] Schaeffer, J., Björnsson, Y., Burch, N., Lake, R., Lu, P. and Sutphen, S.: Building the Checkers 10-Piece Endgame Databases, Advances in Computer Games, pp. 193–210 (2004).

[3] Takizawa, H.: Othello Is Solved, arXiv:2310.19387 (2023).

[4] Russell, S. and Norvig, P.: Artificial Intelligence: A Modern Approach, 4th ed., Global Edition, Pearson (2021).

[5] Russell, S. and Wolfe, J.: Efficient Belief-State AND-OR Search, with Application to Kriegspiel, Proceedings of IJCAI-05, pp. 278–285 (2005).

[6] 田中哲朗：R-Rivals のナッシュ均衡戦略、ゲームプログラミングワークショップ 2021 論文集、pp. 138–143 (2021).

[7] 末續鴻輝、織田祐輔：ガイスターにおける必勝局面を利用した敵駒推定、情報処理学会研究報告、Vol. 2020-GI-43, No. 19, pp. 1–4 (2020).

[8] 清水康平：修士論文、電気通信大学 (2021).

[9] 高峰裕輝、清水康平、保木邦仁：不完全情報ゲーム「ガイスター」のエンドゲームの研究、ゲームプログラミングワークショップ 2025 論文集、pp. 163–170 (2025).

[10] 山本敦也、保木邦仁：NOCCA×NOCCA の強解決、ゲームプログラミングワークショップ 2022 論文集、pp. 9–16 (2022).

[11] 三納侑樹、保木邦仁：バックギャモンのエンドゲームデータベース拡張の試み、ゲームプログラミングワークショップ 2024 論文集、pp. 66–71 (2024).

© 2026 Information Processing Society of Japan