A Stone Geography Game on Graphs

荻沼　弘実[1,a)]　篠田　正人[2,b)]

概要：グラフ上で 2 人のプレイヤーがそれぞれ自分の駒を持ち，辺上の石を取りながら移動する新たな組合せゲーム Stone Geography を提案する．このゲームは，グラフ上の石取りゲーム Graph Nim と駒の移動を特徴とする Geography のルールを組み合わせたものである．本論文では簡単なグラフにおける解析例を通してこのゲームの特徴と研究上の意義を考察し，今後の研究課題を提示する．さらには数学的な解析にとどまらず，人間同士が実際に対戦して楽しむためのゲーム設計と実施方法についても検討する．

キーワード：組合せゲーム理論，グラフ上のゲーム，Graph Nim，Geography，娯楽数学

A Stone Geography Game on Graphs

Oginuma Hiromi[1,a)]　Shinoda Masato[2,b)]

Abstract: We introduce a new combinatorial game called Stone Geography, in which two players each control their own token and move it along the edges of a graph while removing stones from the traversed edges. This game combines features of Graph Nim, a stone-removal game played on graphs, and Geography, a game involving the movement of tokens on graphs. In this paper, we present analyses of the game on simple graphs to illustrate its properties and discuss its mathematical significance and directions for future research. We also explore how the game can be designed and implemented for recreational play, with an emphasis on making it enjoyable for human players.

Keywords: Combinatorial game theory, Games on graphs, Graph Nim, Geography, Recreational mathematics

1. はじめに

ニム（Nim）は古くから知られるゲームの一つである．基本ルールでは 3 つの石の山があり，2 人のプレイヤーが交互に 1 つの山から任意の正の整数個の石を取り除く．最後の石を取ったプレイヤーが勝ちとなる正規形（normal play）のルールでは，自分の着手で各山の石数のニム和を 0 にできれば勝てることが知られている [1]．

ニムには様々な拡張が存在しており，本研究と特に関連するものとして，Fukuyama [2], [3] によって導入された，グラフ上の石を取る Graph Nim が挙げられる[*1]．Graph Nim では，各辺に非負整数の重み（石の数）を与え，プレイヤーは辺の重みを 1 以上減少させながら共有の 1 つの駒を移動させてゲームを進める．ただし，重みが 0 となった辺は通過できない．

一方，グラフ上で駒を移動させるゲームとして，Generalized Geography [4] も知られている．Geography は，プレイヤーが交互に地名を挙げ直前に挙げられた地名の最後の文字で始まる地名を答えるという，しりとりに似た言葉遊びに由来する．これを有向グラフ上に一般化した Generalized Geography では，プレイヤーが交互に駒を隣接頂点へ移動させ，通過した辺または訪問した頂点を再利用できないというルールを持つ．このゲームには不偏（impartial）タイプと非不偏（partizan）タイプの変種があり，基本的な不偏タイプでは共有の 1 つの駒を交互に動かすのに対し，非不偏タイプでは各プレイヤーがそれぞれ固有の駒を動かす．

本研究では，この Graph Nim と Geography の特徴を合

[1] 奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科
Nara Women's University, Graduate School of Humanities and Sciences, Nara, Nara 630-8506, Japan
[2] 奈良女子大学研究院自然科学系
[a)] xah_oginuma@cc.nara-wu.ac.jp
[b)] shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

[*1] Graph Nim の名称は他の拡張ニムでも使われている．本論文内では Graph Nim を，Fukuyama が [2] でルールを与えたものに限定して言及する．

© 2026 Information Processing Society of Japan

わせた新しいゲームである **Stone Geography** を導入する．すなわち本ゲームは，Graph Nim に由来する「駒の通過した辺の重みを 1 以上減少させる」というルールと，Partizan Geography に由来する「プレイヤーが自分の駒を動かしてゲームを進行する」というルールを融合させた点に特徴がある．特に本論文では，強解決が可能である簡単なグラフ上での結果を示すことでこのゲームの数学的な解析の例を示すとともに，実際にプレイするときの適切な設定についても簡単な考察を行う．

2. Stone Geography のルール

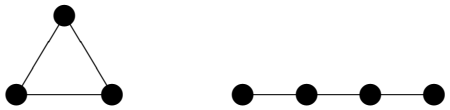
V を頂点集合，E を辺集合とする有限無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．各辺 $e\in E$ 上には非負整数個の石が置かれており，その個数を $w_0(e)$ と表す．ゲーム開始時，先手と後手のプレイヤーはそれぞれ頂点を V から 1 つ選び（それぞれ X_0 と Y_0 とする），自身の駒を配置する．なお，同一の頂点に両プレイヤーの駒を配置することも許す．各手番において，プレイヤーは u にある自身の駒を，隣接頂点 v へ移動する．ただし，移動は辺 $\langle u,v\rangle$ 上の石の個数が $w(\langle u,v\rangle)\geq 1$ を満たす場合に限り可能であり，移動と同時に辺 $\langle u,v\rangle$ 上の石を 1 個以上取り除く．また，相手プレイヤーの駒のある頂点に移動することも認める．自分の手番で着手できなくなったプレイヤーが負けとなる正規形のゲームである．ゲーム中の局面は，時刻 $t\in\{0,1,2,\dots\}$ における先手プレイヤーの駒の位置 $X_t\in V$，後手プレイヤーの駒の位置 $Y_t\in V$ および各辺の石数 $\{w_t(e)\}_{e\in E}$ の組 $(\{w_t(e)\}_{e\in E};X_t,Y_t)$ で表すことができる．実際にプレイする場合のゲームの開始方法として

1. ゲーム盤面となるグラフ $G=(V,E)$ が与えられる．
2. プレイヤーの先手後手を決め，先手が X_0 の位置を選び，続いて後手が Y_0 の位置を選ぶ．
3. 各辺上の石数 $\{w_0(e)\}_{e\in E}$ が，何らかの確率分布の下でランダムに定まる．
4. 先手から着手を開始し，頂点 X_0 に隣接するある辺 e を選んで $w_0(e)$ の石を 1 個以上減らして $w_1(e)$ とし，e のもう一方の端点 X_1 に駒を移動する．
5. 以下，$t=1,2,\dots$ において後手，先手，・・・の順に，4. と同様に石を取りつつ自身の駒を移動させる．

の順で行うことを想定するが，この設定については第 5 章で具体例をもとに検討する．

3. 基本的なグラフでの Stone Geography

Stone Geography は零和有限確定完全情報ゲームであるため，引き分けがなく，各局面において手番側（その局面で次に着手を行うプレイヤー）または非手番側（その局面の直前の着手を行ったとみなされるプレイヤー）のいずれか一方に必ず勝つ戦略が存在し，手番側が勝てる局面をN局面，非手番側が勝てる局面をP局面と呼ぶ．ゲーム中のすべての局面をN局面とP局面に分類することが強解決である．本章と次章ではこのゲームの数学的解析の第一歩として，基本的なグラフでのゲームの強解決を行う．この対象として，3 頂点サイクルグラフおよび 4 頂点パスグラフ（下図）を考える．



3 頂点サイクルグラフ　　4 頂点パスグラフ

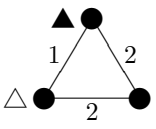
3.1 3 頂点サイクルグラフ

まず，$G=(V,E)$ として $V=\{v_1,v_2,v_3\},E=\{e_1=\langle v_1,v_2\rangle,e_2=\langle v_2,v_3\rangle,e_3=\langle v_3,v_1\rangle\}$ とする．ここでは時刻はすべて $t=0$ とし，局面 $(w_0(e_1),w_0(e_2),w_0(e_3);X_0,Y_0)$ がP局面かN局面かの分類を行う．$X_0=v_i,Y_0=v_j$ を固定したときには石数がそれぞれ $w_0(e_1)=a,w_0(e_2)=b,w_0(e_3)=c$ である局面を単に (a,b,c) で表し，このときのP局面集合を P_{ij} で表すことにする．定理 1 では局面の対称性を考え P_{11} および P_{12} のみを具体的に示す[*2]．

定理 1　3 頂点のサイクルグラフでの P 局面集合 $P_{11}=\bigcup_{k=1}^{3}P_{11}^{(k)}$，$P_{12}=\bigcup_{k=1}^{8}P_{12}^{(k)}$ は以下の通りである．

$P_{11}^{(1)}=\{(0,b,0)\mid b\geq 0\}$，$P_{11}^{(2)}=\{(a,0,c)\mid a\geq 1,\ c\geq 1\}$，
$P_{11}^{(3)}=\{(2,1,2)\}$，
$P_{12}^{(1)}=\{(0,b,0)\mid b\geq 0\}$，$P_{12}^{(2)}=\{(0,b,c)\mid b\geq 2,\ c\geq 1\}$，
$P_{12}^{(3)}=\{(1,b,0)\mid b\geq 1\}$，$P_{12}^{(4)}=\{(1,b,1)\mid b\geq 1\}$，
$P_{12}^{(5)}=\{(a,1,c)\mid a\geq 2,\ c\geq 1\}$，
$P_{12}^{(6)}=\{(a,b,1)\mid a\geq 2,\ b\geq 3\}$，
$P_{12}^{(7)}=\{(0,1,1)\}$，$P_{12}^{(8)}=\{(2,2,1)\}$．

3 頂点サイクルグラフでは，いずれの P 局面も石数が 1 以下の辺を含んでいる．これは，通過すると後戻りできない辺を作り相手の駒の動きに制約を与える着手が有効であることを示している．さらにこのゲームは，戦略的に着手を行えば，敗者はなるべく手数を延ばそうと抵抗しても高々 5 手でゲームが終了することもわかる．下の初期局面が，ゲームが 5 手かかるひとつの例である（以下の図では先手プレイヤーを▲，後手プレイヤーを△で表すこととする）．



定理 1 の証明の概略として，まず N 局面から P 局面に移す着手について述べる．$X_0=Y_0=v_1$ であるときの N 局面集合を N_{11}，$X_0=v_1,Y_0=v_2$ であるときの N 局

[*2] たとえば P_{22} を得るためには P_{11} における (a,b,c) を (c,a,b) に読み替えればよく，$P_{11}^{(3)}=\{(2,1,2)\}$ に対しては $P_{22}^{(3)}=\{(2,2,1)\}$ が対応する．

© 2026 Information Processing Society of Japan

面集合を N_{12} とし，これらを具体的に $N_{11} = \bigcup_{k=1}^{4} N_{11}^{(k)}$，$N_{12} = \bigcup_{k=1}^{7} N_{12}^{(k)}$ として以下の通りに与え，それぞれの局面でどの P 局面集合の局面に移す着手が可能かを $\to$ で示す．

$N_{11}^{(1)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 0, c \geq 1\} \cup \{(a,b,0) \mid a \geq 1, b \geq 0\}$
$\to P_{12}^{(1)} \cup P_{13}^{(1)}$,
$N_{11}^{(2)} = \{(1,1,c) \mid c \geq 1\} \cup \{(a,1,1) \mid a \geq 1\}$
$\to P_{12}^{(7)} \cup P_{13}^{(7)}$,
$N_{11}^{(3)} = \{(a,1,c) \mid a \geq 2, c \geq 2, (a,c) \neq (2,2)\}$
$\to P_{12}^{(5)} \cup P_{13}^{(5)}$,
$N_{11}^{(4)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 1, b \geq 2, c \geq 1\} \to P_{12}^{(2)} \cup P_{13}^{(2)}$,
$N_{12}^{(1)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 2,\ c \geq 1\} \to P_{23}^{(1)}$,
$N_{12}^{(2)} = \{(0,1,c) \mid c \geq 2\} \to P_{23}^{(3)}$,
$N_{12}^{(3)} = \{(a,0,c) \mid a \geq 1, c \geq 0\} \to P_{22}^{(1)}$,
$N_{12}^{(4)} = \{(a,b,0) \mid a \geq 2,\ b \geq 1\} \to P_{22}^{(2)}$,
$N_{12}^{(5)} = \{(a,2,1) \mid a \geq 3\} \to P_{22}^{(3)}$,
$N_{12}^{(6)} = \{(1,1,c) \mid c \geq 2\} \to P_{23}^{(4)}$,
$N_{12}^{(7)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 1, b \geq 2, c \geq 2\} \to P_{23}^{(5)}$.

次に，各 P 局面集合からの着手で移せる局面が含まれる局面集合を列記する．これらの集合には N 局面しか含まれず，結果として P 局面からの着手で N 局面に移せないことがわかる．

$P_{11}^{(1)} \to \emptyset,\ P_{11}^{(2)} \to N_{12}^{(1)} \cup N_{12}^{(3)} \cup N_{13}^{(1)} \cup N_{13}^{(3)}$,
$P_{11}^{(3)} \to N_{12}^{(5)},\ P_{11}^{(4)} \to N_{12}^{(2)}$,
$P_{12}^{(1)} \to \emptyset,\ P_{23}^{(3)} \to N_{23}^{(4)}$,
$P_{12}^{(3)} \to N_{22}^{(1)},\ P_{12}^{(4)} \to N_{22}^{(1)} \cup N_{23}^{(3)}$,
$P_{12}^{(5)} \to N_{22}^{(1)} \cup N_{22}^{(2)} \cup N_{22}^{(4)} \cup N_{23}^{(3)} \cup N_{23}^{(6)} \cup N_{23}^{(7)}$,
$P_{12}^{(6)} \to N_{22}^{(1)} \cup N_{22}^{(2)} \cup N_{22}^{(3)} \cup N_{23}^{(3)}$,
$P_{12}^{(7)} \to N_{23}^{(3)},\ P_{12}^{(8)} \to N_{22}^{(1)} \cup N_{22}^{(2)} \cup N_{23}^{(3)}$.

このように N 局面と P 局面の分類ができるが，簡単な例でありながら証明をすべて記述するときには煩雑さは避けられない．

3.2 4 頂点パスグラフ

次に，$G = (V, E)$ において $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{e_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, e_2 = \langle v_2, v_3 \rangle, e_3 = \langle v_3, v_4 \rangle\}$ での Stone Geography を考える．ここで，$X_0 = v_i, Y_0 = v_j$ を固定して $w_0(e_1) = a, w_0(e_2) = b, w_0(e_3) = c$ である局面を単に (a,b,c) とし，このときの P 局面集合を P_{ij} とする．定理 2 では局面の対称性を考え $P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}$ のみを具体的に示す．

定理 2 4 頂点のパスグラフでの P 局面集合 P_{11}，$P_{12} = \bigcup_{k=1}^{4} P_{12}^{(k)}$，$P_{13} = \bigcup_{k=1}^{7} P_{13}^{(k)}$，$P_{14} = \bigcup_{k=1}^{4} P_{14}^{(k)}$，$P_{21}$，$P_{22} = \bigcup_{k=1}^{4} P_{22}^{(k)}$，$P_{23} = \bigcup_{k=1}^{7} P_{23}^{(k)}$，$P_{24} = \bigcup_{k=1}^{10} P_{24}^{(k)}$ は以下の通りである．

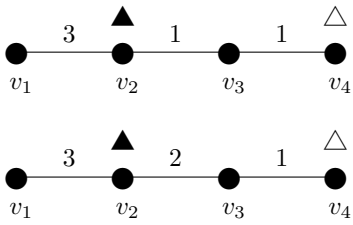
$P_{11} = \{(0,b,c) \mid b \geq 0,\ c \geq 0\}$,
$P_{12}^{(1)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 0,\ c \geq 0\}$,
$P_{12}^{(2)} = \{(1,b,c) \mid b \geq 1,\ c \geq 0\}$,
$P_{12}^{(3)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 2,\ b \geq 1,\ c \geq 1,\ a < b + c\}$,
$P_{12}^{(4)} = \{(b + c, b, c) \mid b \text{ is odd},\ c \geq 1\}$,
$P_{13}^{(1)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 0,\ c \geq 0\}$,
$P_{13}^{(2)} = \{(a,0,c) \mid a \geq 1,\ a \leq c\}$,
$P_{13}^{(3)} = \{(a,b,0) \mid a \geq 1,\ b \geq 2\}$,
$P_{13}^{(4)} = \{(1,b,c) \mid b \geq 1,\ c \geq 1\}$,
$P_{13}^{(5)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 2,\ b \geq 1,\ a + b \leq c\}$,
$P_{13}^{(6)} = \{(a,b,a+b-1) \mid a \geq 2,\ b \text{ is odd}\}$,
$P_{13}^{(7)} = \{(a,1,a-1) \mid a \geq 1,\ a \text{ is odd}\}$,
$P_{14}^{(1)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 0,\ c \geq 0\}$,
$P_{14}^{(2)} = \{(a,0,c) \mid a \geq 1,\ a \leq c\}$,
$P_{14}^{(3)} = \{(a,1,c) \mid a \geq 1,\ a + 1 \leq c\}$,
$P_{14}^{(4)} = \{(a,1,a) \mid a \geq 2,\ a \text{ is even}\}$,
$P_{21} = \{(0,0,c) \mid c \geq 0\}$,
$P_{22}^{(1)} = \{(0,0,c) \mid c \geq 0\},\ P_{22}^{(2)} = \{(a,b,0) \mid a \geq 1,\ b \geq 1\}$,
$P_{22}^{(3)} = \{(a,b,c) \mid b \geq 1,\ c \geq 1,\ a \geq b + c\}$,
$P_{22}^{(4)} = \{(a,b,a-b+1) \mid a \geq 2,\ b \geq 2,\ b \text{ is even}\}$
$P_{23}^{(1)} = \{(0,0,c) \mid c \geq 0\},\ P_{23}^{(2)} = \{(a,0,c) \mid a \geq 1,\ a \leq c\}$,
$P_{23}^{(3)} = \{(0,1,c) \mid c \geq 1\}$,
$P_{23}^{(4)} = \{(a,1,c) \mid a \geq 1,\ a + 1 \leq c\}$,
$P_{23}^{(5)} = \{(a,1,a) \mid a \text{ is odd}\}$,
$P_{23}^{(6)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 1,\ b \geq 2,\ c \geq 1,\ c \leq a < b + c\}$,
$P_{23}^{(7)} = \{(b + c, b, c) \mid b \geq 2,\ b \text{ is even},\ c \geq 1\}$,
$P_{24}^{(1)} = \{(0,0,c) \mid c \geq 0\},\ P_{24}^{(2)} = \{(a,0,c) \mid a \geq 1,\ a \leq c\}$,
$P_{24}^{(3)} = \{(0,b,c) \mid b \geq 1,\ c \geq 2\}$,
$P_{24}^{(4)} = \{(1,b,c) \mid b \geq 1,\ b + 1 \leq c\}$,
$P_{24}^{(5)} = \{(1,b,b) \mid b \text{ is odd}\}$,
$P_{24}^{(6)} = \{(a,1,c) \mid a \geq 1,\ a \leq c\}$,
$P_{24}^{(7)} = \{(a,1,a-1) \mid a \geq 2,\ a \text{ is even}\}$,
$P_{24}^{(8)} = \{(a,b,c) \mid a \geq 2,\ b \geq 2,\ a + b \leq c\}$,
$P_{24}^{(9)} = \{(a,b,a+b-1) \mid a \geq 2,\ b \geq 3,\ b \text{ is odd}\}$,
$P_{24}^{(10)} = \{(0,1,1)\}$.

この定理の証明は定理 1 のときと同様に，まず N 局面集合を分類しそれぞれの N 局面から P 局面に移す着手があること，および P 局面から着手で移せる局面はすべて N 局面であることを示してできるが，本論文ではゲームの特徴を示すことを主眼とするため，詳細な証明は省略する．このグラフはサイクルを持たない木グラフであり駒の移動先は限定されるため，後に述べる予想 3 も含めて木グラフで

© 2026 Information Processing Society of Japan

の一般的な解決と証明が与えられると期待している．

証明に代えて，このゲームの持つ戦略性についてごく簡単な 2 つの例を比較しながら述べる．これらは石数が少ない局面であるが，手番側の行動の違いを明確に表すものである．



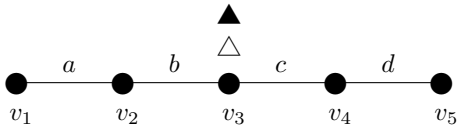
上図では，先手プレイヤー▲は右（v_3）に行くと後手プレイヤー△が左（v_3）に来ることで動けなくなるため，代わりに 1 個石を取って左（v_1）に行くのが正解手となる．このとき石を 1 個だけ取るのは v_1 と v_2 の間を動ける回数を最大にするためであり，ここで 2 個以上石を取ってしまうと先手の負けになることは簡単に確認できる．このように，4 頂点パスグラフでは自分の駒の近くの石を少しずつ取り，可動時間を長く保つ着手が有効である．

一方下図では，▲は左（v_1）に行くと可動時間が不足し負けになることが確認できる．代わりに 1 個石を取って右（v_3）に行くのが正解手となり，この結果△は v_3 より左には移動できないことがわかる．このように，相手の駒の近くの石を少なくすることにより相手の駒の動きに制約を加える着手も有効である．以上より，このゲームは Graph Nim，Geography の特徴を併せ持つものといえる．

さらに，定理 2 の P 局面集合の記述には石数の偶奇による細かい場合分けが生じている．この偶奇の違いによる影響は次章に述べる 5 頂点パスグラフの解析でも顕著に現われ，なぜこの違いが生じるかを可動時間を表す関数を用いて示す．

4. 5 頂点パスグラフでの勝敗判定

前章で述べた通り，簡単なグラフ上でも Stone Geography の局面分類は場合分けが多く必要である．次の段階として 5 頂点パスグラフを考え P 局面集合を使う石の個数の制限の下で調べたところ，両プレイヤーの駒がともに中央の位置にあるときの P 局面となる条件を以下のように推測できたので予想として述べる．



そのために，5 頂点パスグラフの表記設定をしておく．$G = (V, E)$ が $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{e_i = \langle v_i, v_{i+1}\rangle, 1 \le i \le 4\}$ であるとする．ここで扱う局面は特に $X_0 = Y_0 = v_3$ であるものとし，下記の予想においては $(w_0(e_1), w_0(e_2), w_0(e_3), w_0(e_4); v_3, v_3)$ を (a, b, c, d) で表すこととする（左下図参照）．

予想 3 5 頂点パスグラフで $X_0 = Y_0 = v_3$ であるときの P 局面集合 $P_{33} = \bigcup_{k=1}^{4} P_{33}^{(k)}$ は以下の通りである．

$$P_{33}^{(1)} = \{(a, 0, 0, d) \mid a \ge 0,\ d \ge 0\},$$

$$P_{33}^{(2)} = \left\{ \begin{matrix}(a,b,c,0),\\(0,c,b,a)\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}(a,b,c) \text{ は 4 頂点パスグラフでの}\\P_{33} \text{ の条件をみたす}\end{matrix} \right\},$$

$$P_{33}^{(3)} = \left\{ (a,b,c,d) \;\middle|\; \begin{matrix}abcd \neq 0, T(a,b) = T(d,c) \text{ かつ}\\(a = d \text{ または } \min\{b,c\} \le 2)\end{matrix} \right\},$$

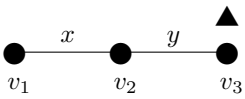
$$P_{33}^{(4)} = \left\{ \begin{matrix}(a,2,c,a-c+1),\\(a-c+1,c,2,a)\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}a \ge 2, a \text{ is even},\\3 \le c < a, c \text{ is odd}\end{matrix} \right\}.$$

ただし 1 以上の整数 x, y に対し

$$T(x,y) = \begin{cases} x+y-1 & x \text{ is odd, } y \text{ is even} \\ x+y & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．

ここで $T(x, y)$ は，下図のように 3 頂点パスグフラフ，すなわち $G = (V, E), V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{e_1 = \langle v_1, v_2\rangle, e_2 = \langle v_2, v_3\rangle\}$ において $w_0(e_1) = x, w_0(e_2) = y, X_0 = v_3$ の状況で先手のプレイヤーが相手のプレイヤーを考えず，石を 1 個以上取る合法手を繰り返したときの最大移動回数を表すものである．この可動時間を長くするために 1 個ずつ石を取るとき，x が奇数かつ y が偶数であるとすべての石を取り切ることはできないため，この場合は総石数から 1 を引く必要がある．



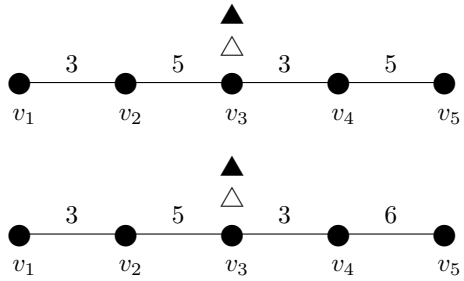
予想 3 では，先手後手ともに v_3 にいるときに限定して P 局面集合を示している．X_0, Y_0 のすべての場合について記述するとあまりにも煩雑になるため，他の場合は省略している．ただし，実際のゲームの進行において開始から▲，△がまったく出会わずに終わるゲームはごく単純な場合に限られ，よって予想 3 で与えた $X_0 = Y_0 = v_3$ のときの勝敗条件がわかれば▲と△が v_3 で出会うとき（この点を遭遇点と呼ぶ）の勝敗判定が可能となり，このゲームをほぼ理解できると言ってよい．

この推測された P 局面集合について簡単に説明を加えておく．$P_{33}^{(1)}$ は自明な場合であり，$P_{33}^{(2)}$ は端の辺の石数が 0 であるため定理 2 に含まれる．$P_{33}^{(3)}$ が重要な P 局面集合で，v_3 を挟んだ両側の可動時間 $T(a, b)$ と $T(d, c)$ が一致し，先手の▲が左の v_2 に行けば後手の△は右の v_4 に行き，続いて▲が v_3 に戻れば△も可動時間を同数に修正しながら v_3 に戻って左右のバランスを取り続ける構造が生じることを示している．これは 2 山のニムにおいて両方の山

© 2026 Information Processing Society of Japan

の石数を揃えて相手の手番とする戦略の亜種であると言える．ただし 5 頂点パスグラフの Stone Geography ではこれだけの単純な構造ではなく，後手の△が可動時間を同数に保ち続けることができるか，また $T(x,y)$ の値が x,y の偶奇によって小さく変わることがどう影響するかという問題が生じ，そのために $P_{33}^{(3)}$ では $a=d$ または $\min\{b,c\}\leq 2$ という付加条件があり，さらに例外的な P 局面集合として $P_{33}^{(4)}$ が現れると考えられる．

予想 3 で与えた P 局面から先手が勝てない，すなわちこれらの局面からゲームを開始すれば後手が確かに勝てることの証明は，場合分けがいくつか必要であるものの比較的簡明に行うことができる．しかしこの予想の証明を完全に与えるためには，これらの P 局面集合に含まれない N 局面から先手が具体的に勝ちに導く手順を示す必要がある．しかし，わずかな石数の違いによって先手の勝利戦略は大きく変化する．ひとつの例として，両プレイヤーの駒が中央の頂点にあるとしてゲームを開始するとき，各辺の石数が $(3,5,3,5)$ および $(3,5,3,6)$ である初期局面はいずれも N 局面，すなわち先手の勝てるゲームである．

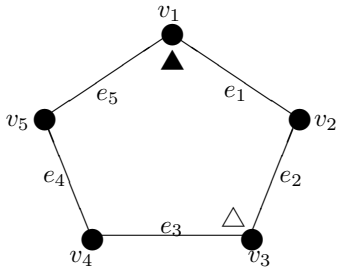


しかし，先手は前者では左側の辺から 1 個取る手が唯一の正解手である（$T(3,5)=T(5,3)$ と同数であってもこの手でだけは勝てる）のに対し，後者では右側の辺から 1 個取る（$T(3,5)<T(6,3)$ であることを活かす）手が唯一の正解手となる．このように，石数がわずか 1 個異なるだけでも勝利戦略が変わることから，本ゲームの解析には駒の配置と石数によって適切な場合分けを行う必要がある．

予想 3 に現れる P 局面の条件をよく理解すれば，G が一般的な木グラフ（サイクルを含まない）でのゲームでも勝敗判定条件が得られるのではないかと期待している．サイクルを持たないグラフにおいてはグラフの各部分集合ごとに可動時間を定める関数を用いることで，▲と△が出会ったときの可動時間のバランスが取れた状態を記述すれば一般化できそうであるが，遭遇点から辺が 3 本以上出ているときにこの条件がどのように表されるかを検討しなければならない（ここでそれぞれの可動時間のニム和の条件が現れるかもしれない）．一方 G が木グラフでない場合については，現時点では 4 頂点サイクルグラフでもまだ P 局面集合を決定することができておらず，まずは n 頂点サイクルグラフでの決定が研究課題である．この難しさを説明するための研究として，P 局面かどうかを判定する計算量についても考察する必要がある．

5. 実際にゲームを行うための検討

本章では，このゲームを実際に 2 人でプレイすることを簡単に検討する．その例として，下記のような設定を提案する．



- $G=(V,E)$ として，5 頂点のサイクルグラフを用いる．すなわち $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ とし，$E=\{e_i=\langle v_i,v_{i+1}\rangle, 1\leq i\leq 5\}$（ただし $v_6=v_1$）とする．
- 先手後手のプレイヤーの駒はそれぞれ v_1 と v_3 に置く．すなわち $X_0=v_1, Y_0=v_3$ である．
- 各辺 e_i の初期石数 $w_0(e_i)$ は，$\{2,3,4,5,6,7\}$ から一様分布で定める．すなわち，さいころを振って出た目 $+1$ とすればよい．

この設定の提案は，G が木グラフでないこと，あまり手数が長いゲームとならないこと，各辺の石数をランダムに簡単な方法で定めたいこと，先手の優位性が大きくならないこと，を前提に考察したものである．X_0 を v_1 に固定したときの Y_0 の位置（v_1,v_2,v_3 のいずれか）および石数の範囲（2 から 7，3 から 8，4 から 9 のいずれか）によって先手必勝となる割合を（$6^5=7776$ 通りからランダムに選ぶとして）調べたところ以下の結果となった．

$Y_0\backslash$ 石数	2-7	3-8	4-9
v_1	77.08%	76.61%	61.32%
v_2	87.99%	88.91%	98.47%
v_3	58.95%	75.05%	79.51%

この結果を基本とし，先手後手の勝率が均衡しているという観点を重視してゲーム設定を提案した．ただし各プレイヤーの勝利戦略の複雑さまでは考慮しておらず，この点は課題として残っている．なおこの勝率表において，なぜこのように先手勝率が上下するかは数学的な解析を進める点からも興味深い．

参考文献

[1] Bouton, C. L. Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics* **3**, 35-39 (1902).
[2] Fukuyama, M. A Nim game played on graphs. Theoretical Computer Science **304**, 387-399 (2003).
[3] Fukuyama, M. A Nim game played on graphs II. Theoretical Computer Science **304**, 401-419 (2003).
[4] Fraenkel, A.S. and Simonson, J. Geography. Theoretical Computer Science **110**, 197-214 (1993).

© 2026 Information Processing Society of Japan