双方連続王手による同一局面反復の不可能性について

志村　将也[1,a)]

概要：本研究では，将棋の連続王手の千日手規則に関連して，通常の将棋において双方の指し手がすべて王手であり，かつ同一局面に戻る手順が存在しないことを示す．本稿では，手順中に双方の玉が移動しないこと，駒の役割に基づく分類，王手に関する幾何学的制約，各指し手に伴う角度変化，および半平面上の不変量を組み合わせて矛盾を導く．また，同じ構造的性質を用いて，通常のチェスにおいても，双方の指し手がすべて王手であり，かつ同一局面に戻る手順が存在しないことを示す．

Impossibility of Repetition by Mutual Perpetual Check

Masanari Shimura[1,a)]

Abstract: This paper proves that, in standard shogi, there is no sequence of moves that returns to the same position while every move by both players is a check. The proof combines the fact that neither king moves during such a sequence, a classification of pieces according to their roles, geometric constraints associated with checks, changes in certain angles associated with the moves, and a half-plane invariant. The same structural properties also yield the corresponding impossibility result for standard chess.

1. はじめに

将棋の規則の一つに，「連続王手の千日手」がある [1]．これは，千日手，すなわち同一局面が繰り返し現れる手順において，一方の対局者の指し手がすべて王手だった場合，その対局者を反則負けとする規則である．ところが，この条件を双方の対局者が満たす場合，すなわち，千日手に至る手順において双方の指し手がすべて王手だった場合の裁定は，規則に定められていない．

そこで，そもそもそのような未規定の場合は，将棋の規則のもとで実際に起こり得るのかという問いが生じる．本稿の主結果は，この可能性を排除する次の定理である．

定理 1.1. 通常の将棋において，双方の指し手がすべて王手であり，かつ同一局面へ戻る手順は存在しない．

この不可能性は，林による将棋のグラフ理論的研究において，未証明の仮定として置かれている [2]．文献 [3], [4] では，この不可能性の証明が試みられ，玉の不動性や両王手の禁止などの結果が示されている．一方，これらの文献には，提示された一部の定理の証明に不備があることが記されており，これらの議論だけでは不可能性の証明は完結していない．文献 [5] では，大駒について，相手玉が利きの筋上にいるか否かに応じて，駒の移動，駒を打つ手，および捕獲に関する制約が示されている．文献 [6] では，銀による開き王手の不可能性が示されている．

本稿では，文献 [5] で大駒について示された，駒の移動，駒を打つ手，および捕獲に関する制約を踏まえ，一般の駒に対して「睨み」を定義し，これらの制約を本証明に適した形で記述する．これにより，手順中の駒を相手玉との関係に基づいて二種類に分類し，各種類の駒が手順中に果たす役割を明確にする．

次に，将棋盤の各マスを平面上の格子点とみなし，王手に関与する駒と双方の玉との間に成り立つ幾何学的制約を示す．続いて，各指し手に伴う幾何学的な角度変化を定め，その総和を考えることで，双方がそれぞれ少なくとも一度は開き王手を行うことを示す．最後に，どの駒種が開き王手を行い得るかを調べ，開き王手を行う駒の駒種を角または馬に限定した上で，双方の玉とこれらの駒の配置を絞り込む．さらに，ある半平面に属する駒の個数に注目し，残

[1] 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Graduate School of Mathematics, Nagoya University
[a)] shimura.masanari.s4@s.mail.nagoya-u.ac.jp

© 2026 Information Processing Society of Japan

るすべての場合に対して矛盾を導く．以上の議論を組み合わせることで，定理 1.1 を証明する．

主定理の証明に用いる議論のうち，将棋固有の駒種に依存しない部分は，チェスにおいても同様に成り立つ．そこで本稿では，チェスにおいても，双方の指し手がすべて王手であり，かつ同一局面へ戻る手順が存在しないことを示す．

なお，本稿で述べる将棋およびチェスに関する結果とその証明は，筆者が 2024 年 3 月に「なんか」名義で公開したメモ [7] において既に公表したものである．

2. 睨みの有無による駒の分類

以下, 5 節までかけて, 定理 1.1 の証明をする．証明は, 双方連続王手で同一局面になる手順の存在を仮定して矛盾を導く方針で行う．

双方連続王手で同一局面になる手順の存在を仮定し, そのような手順を任意に 1 つ選ぼう．以下, 単に**手順**といえば, この選んだものを指すものとする．これから述べるすべての主張は, この手順中の指し手について述べたものである．

定義 2.1. 手順中, 一度も移動したり相手に取られたりしない駒を**不動駒**ということにする．

命題 2.2 ([3] 定理 1)**.** 玉は不動駒である．

証明. 手順中に玉を移動する手が含まれていたとしよう．すると, その手は開き王手でなければならないから, 移動する前の時点で双方の玉は縦・横・斜めいずれかの同一直線上にいなければならない．しかし双方の玉が隣りあうことは許されないので, 移動後は縦・横・斜めいずれかの同一直線上に並ぶことができない．よって, それ以降双方の玉は移動することができず, もとの局面に戻ることができないので, 矛盾である． □

この命題は [3] で証明されており, 今回の問題を考える上で極めて基本的かつ重要な事実である．

系 2.3 ([4] 定理 8)**.** 手順中に両王手は存在しない．

証明. 両王手を解除するには玉が移動しなければならないが, 命題 2.2 より, それは不可能である． □

よって, 手順中のすべての手は, 直接王手か開き王手のいずれか一方である．

定義 2.4. 駒 P を, 盤上の駒とする．もし, P および不動駒以外のすべての駒を盤上から取り除いたときに P が相手玉に王手をかけているならば, P は相手玉を**睨んでいる**ということにする．ただし, 盤上の駒を取り除かなくても王手になっている場合も含めるものとする．

玉が不動駒であることから, 駒が相手玉を睨んでいるかどうかという状態は, その駒を動かさない限り変化しない．実は, 以下で見ていくように, その駒を動かすときでさえ, この状態は不変である．

補題 2.5. 相手玉を睨まない位置に駒を移動させる手は, 開き王手である．

証明. 移動する駒で直接王手するわけではないので, 開き王手でなければならない． □

補題 2.6. 相手玉を睨んでいる駒を移動させる手は, 開き王手ではない．

証明. 相手玉を睨む駒を移動させる前の時点で相手玉に王手はかかっていないので, 移動させる駒と相手玉の間には効きを遮る駒がある．よって, 移動してもこの駒が相変わらず効きを遮るので, 開き王手にならない． □

補題 2.7 ([5] 定理 14)**.** 相手玉を睨んでいる駒を, 相手玉を睨まない位置に移動させることはない．

証明. 補題 2.5 と補題 2.6 から直ちに従う． □

補題 2.8 ([5] 定理 16)**.** 相手玉を睨まない位置に駒を打つことはない．

証明. 駒を打つ手は直接王手でなければならないから, 相手玉を睨まなければならない． □

補題 2.9 ([5] 定理 17)**.** 相手玉を睨んでいない駒を, 相手玉を睨む位置に移動させることはない．

証明. 相手玉を睨まない盤上の駒の総数を考える．補題 2.7, 2.8 より，この総数が増加することはない．一方，相手玉を睨まない駒を睨む位置に移動させると，この総数は減少する．これは，同一局面に戻ることに矛盾する． □

補題 2.10 ([5] 定理 18)**.** 相手玉を睨んでいない駒は取られない．

証明. 補題 2.9 と同様にして示される． □

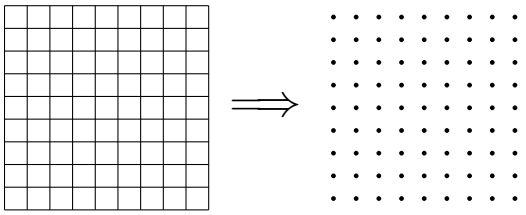
補題 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 により, すべての駒は

I. 手順中常に盤上にあり, 決して相手玉を睨まない
II. 手順中常に, 盤上で相手玉を睨んでいるか駒台の上にある

のどちらか一方に分類される．また, 補題 2.5, 2.6 より, I の駒を移動させる手は開き王手であり, II の駒を移動させたり打ったりする手は直接王手である．

以下, I の駒であって, 手順中一度でも移動する駒を**開き王手を行う駒**ということにする．

© 2026 Information Processing Society of Japan



3. 幾何学的な種々の制約

以降の節では, もっぱら幾何学的な考察を行う.

将棋盤の 9×9 の各マス目を, xy 平面上の格子点（のうちの 9×9 に並んだ 81 個）と対応付けて考え, 駒の位置をこの格子点で表現することにする.

以下, 単に点といえば格子点を指す.

定義 3.1. 駒 P が相手玉を睨んでいるとする. P の位置する点と相手玉の位置する点を結ぶ線分のことを, P が相手玉を**睨むライン**ということにする. ただし, 端点については, P の位置する点は睨むラインに含まれるが, 相手玉の位置する点は含まれない.

注意 3.2. 定義 2.4 より, 相手玉を睨むライン上に不動駒はない. 特に, 相手玉を睨むライン上に味方の玉はない.

以降の命題においてはしばしば, 説明のための便宜上, 手順を実現する 2 人の対局者を「自分」および「敵」とよぶことにし, 自分の駒を自駒, 自分の玉を自玉, 敵の駒を敵駒, 敵の玉を敵玉とよぶ.

命題 3.3 ([5] 定理 20)**.** 開き王手する自駒 P が点 A に移動するとき, A はある自駒 Q が敵玉を睨むライン上にある. また, P が点 A にいる間, Q は移動することはなく敵に取られることもない.

証明. 駒 P を点 A へ移動させる直前にはこの点に P はなく，P は取られることもないため，手順を循環的に考えれば P はいずれ点 A から別の点へ移動しなければならない. しかし駒 P の移動は開き王手でなければならないから, そのためには点 A をまたぐようにある自駒 Q が敵玉を睨んでなければならない. ところが, そのような位置に敵玉を睨む駒を移動させたり打ったりする手は, 前節で述べた通り直接王手でなければならない. よって A に駒がいる状態では, 王手にならないのでそのような手はありえない. したがって, 駒 P を A に移動させたときにはすでに Q は点 A をまたぐように敵玉を睨んでなければならない. □

系 3.4. 開き王手する自駒を移動させるとき, 移動先の点は, ある（別の）自駒が敵玉を睨むライン上であり, ある敵駒が自玉を睨むライン上でもある.

証明. 移動によって敵の王手を解除しなければならないから, 移動先は敵駒が自玉を睨むライン上である. ただし, ラインは片方の端点（敵駒がある点）を含むことに注意（敵駒を取る場合に相当する）. □

命題 3.5. 開き王手する自駒 P が点 A に移動するとき, A は双方の玉の位置する 2 点を通る直線上にはない.

証明. 敵玉の位置を K, 自玉の位置を L とし, A が直線 KL 上にあるとしよう. 系 3.4 と注意 3.2 により, A は K と L の間にある. さらに駒 P が A に移動したとき, 線分 AL 上の点 B に別の自駒 Q があって, K にある敵玉を睨んでいるはずである. すると Q は半直線 BK 上にある敵駒の自玉への睨みを遮っているから, このとき P を BK 上の点 A に移動させる手は敵の自玉への王手を解除する手にならないので, 矛盾である. □

命題 3.6. 王手をかけている駒は, 双方の玉の位置する 2 点を通る直線上にはない.

証明. 点 A にある自駒 P が敵玉に王手をかけているとする. 敵玉の位置を K, 自玉の位置を L とし, 3 点 A, K, L が一直線上にあるとしよう. A にある駒が K にある玉に王手をかけているから, A と K の間に L が並ぶことはない. また, P の王手に対する敵の応手は線分 AK 上（端点 A を含む）に駒を移動または打つ手である. しかしこの手もまた王手でなければならないことと命題 3.5 より, A は K と L の間になければならず、敵の応手は A にある駒 P を取って直接王手する手しかない. それに対する自分の手もその駒を取り返す手しかなく, 以下お互いに駒を取り続けることになり, 盤上の駒は減り続ける一方である. これでは同一局面に戻ることはできず, 矛盾である. □

定義 3.7. 盤面に対応する格子点たちが含まれる xy 平面を, 双方の玉が位置する 2 点を通る直線 h によって 2 つの部分に分けたとき, それぞれの部分を**半平面**ということにする. ただし, 直線 h はどちらの半平面にも含めない.

命題 3.5, 3.6 より, 手順中のすべての指し手はいずれかの半平面上の点に駒を移動させたり打ったりする手であることが分かる.

この節の最後に, 半平面上の不変量を定義しよう.

いま, 2 つの半平面を $\mathbb{H}$ および $\mathbb{H}'$ とし, ある局面において半平面 $\mathbb{H}$ 上の点にある自駒が敵玉に王手をかけているとする. 敵はこの王手を解除しなければならないから, 応手は $\mathbb{H}$ 上の点に駒を移動させたり打ったりする手である. もしその手が直接王手や $\mathbb{H}$ 上の 2 点間を移動する開き王手ならば, この手によって自玉に王手をかける駒もまた $\mathbb{H}$ 上にある. 一方, $\mathbb{H}'$ 上の点にある駒を $\mathbb{H}$ 上の点に移動する開き王手ならば, この手によって自玉に王手をかける駒は $\mathbb{H}'$ 上にある. このことから, 次の命題が成り立つ.

命題 3.8. 半平面 $\mathbb{H}$ 上にある, 双方の開き王手を行う駒の数と王手をかけている駒の数の和を $\operatorname{dis}\mathbb{H}$ で表すことにする. このとき, 手順中のすべての局面において $\operatorname{dis}\mathbb{H}$ の値は一定である.

© 2026 Information Processing Society of Japan

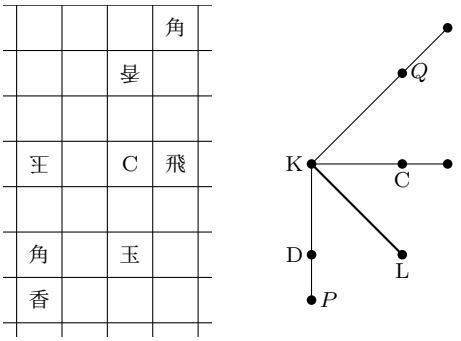


図 1 例 4.3 の図

証明. 直接王手や同一半平面上の 2 点間を移動する開き王手では, $\mathbb{H}$ 上の開き王手を行う駒の数と王手をかけている駒の数はともに変わらない. $\mathbb{H}'$ 上の駒を $\mathbb{H}$ 上に移動する開き王手では, $\mathbb{H}$ 上の開き王手を行う駒の数は 1 つ増え, 王手をかけている駒の数は 1 から 0 に減るので, 和は変わらない. $\mathbb{H}$ 上の駒を $\mathbb{H}'$ 上に移動する開き王手では, $\mathbb{H}$ 上の開き王手を行う駒の数は 1 つ減り, 王手をかけている駒の数は 0 から 1 に増えるので, やはり和は変わらない. □

4. 開き王手の必要性

この節の目標は, 次の命題を示すことである.

命題 4.1. 双方の指し手には, 開き王手がそれぞれ少なくとも 1 手含まれる.

前節に引き続き, 手順を実現する 2 人の対局者（プレイヤー）を「自分」および「敵」とよぶことにする. いま, 敵の手に開き王手はないと仮定しよう.

定義 4.2. 駒 P の位置を A, 敵玉の位置を K, 自玉の位置を L とする. このとき, 角 $\angle$AKL の大きさを, 駒 P が**敵玉においてなす角度**, あるいは点 A が敵玉においてなす角度ということにする.

手順中のすべての自分の指し手を順に $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ とし, $\mathfrak{m}_{n+1} \coloneqq \mathfrak{m}_1$ とおく. 各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対して, 指し手 $\mathfrak{m}_i$ は, 自駒 R_i を点 D_i から点 C_i に移動させて敵駒 Q_i の王手を解除しつつ, 自駒 P_i で敵玉に王手をかけるような手であるとする. ただし, 持駒を打つ手の場合には D_i を定義せず, 直接王手の場合には $P_i = R_i$ である.

自駒 P_i が敵玉においてなす角度を α_i ($0° < \alpha_i < 180°$), 指し手 $\mathfrak{m}_i$ の前の局面で敵駒 Q_i が敵玉においてなす角度を β_i（$0° < \beta_i < 180°$）, 点 C_i が敵玉においてなす角度を γ_i（$0° < \gamma_i < 180°$）で表し,

$$\operatorname{ang}\mathfrak{m}_i \coloneqq \alpha_i - \beta_i, \quad \operatorname{iang}\mathfrak{m}_i \coloneqq \gamma_i - \beta_i, \quad \operatorname{dang}\mathfrak{m}_i \coloneqq \alpha_i - \gamma_i$$

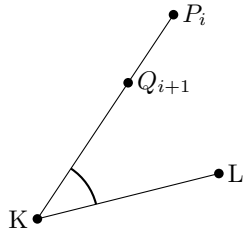
とおく.

例 4.3. **図 1** において, 敵の香車の王手を解除するために角を C に移動する手を $\mathfrak{m}$ とする（添字 i は省略する）. このとき, $\operatorname{iang}\mathfrak{m} = -45°$, $\operatorname{dang}\mathfrak{m} = 0°$, $\operatorname{ang}\mathfrak{m} = -45°$ である.

注意 4.4. $\mathfrak{m}_i$ が自玉に王手をかけている敵駒を取る手のときは $\operatorname{iang}\mathfrak{m}_i = 0$ であり, 合駒をする手のときは $\operatorname{iang}\mathfrak{m}_i < 0$ である. $\operatorname{iang}\mathfrak{m}_i > 0$ となるような指し手 $\mathfrak{m}_i$ は存在しない.

注意 4.5. $\mathfrak{m}_i$ が直接王手のときは $\operatorname{dang}\mathfrak{m}_i = 0$ である. $\mathfrak{m}_i$ が開き王手のときは, 点 D_i は駒 P_i が敵玉を睨むライン上にあるから, $\operatorname{dang}\mathfrak{m}_i$ の定義中の α_i は, 点 D_i が敵玉においてなす角度に等しい.

いま $i = 1, \ldots, n$ とし, 指し手 $\mathfrak{m}_i$ によって, 自駒 P_i が敵玉に王手をかけているとする. 仮定より, これに対する敵の応手は直接王手だから, この応手によって自玉に王手をかける敵駒 Q_{i+1} は自駒 P_i が敵玉を睨むライン上にある. よって, Q_{i+1} が敵玉においてなす角度 β_{i+1} は, 敵の応手の前の局面で P_i が敵玉においてなす角度 α_i に等しい. すなわち,



$$\beta_{i+1} = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ. ここで添字を巡回的に考えると,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{ang}\mathfrak{m}_i &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_{i+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ.

一方, 各々の $\operatorname{ang}\mathfrak{m}_i$ は $\operatorname{ang}\mathfrak{m}_i = \operatorname{iang}\mathfrak{m}_i + \operatorname{dang}\mathfrak{m}_i$ と分解できる. そこで, iang および dang それぞれについての総和を考える.

iang については, 注意 4.4 により総和は負であることが分かる. なぜならば, もし手順中の自分の指し手に合駒をする手がなかったとすると, 自分は敵駒を取り続けることになり, 自分の持駒は増え続ける一方なので矛盾が生じる. よって, 手順中に合駒をする手が少なくとも 1 手あるので, iang についての総和は負の値である.

したがって, dang についての総和は正の値でなければならない. ところが, 次の補題で述べるように, dang についての総和は 0 となる.

補題 4.6.

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{dang}\mathfrak{m}_i = 0$$

が成り立つ.

証明. 各局面において, 相手玉を睨まない盤上の自駒すべてについて, それらが敵玉においてなす角度の総和を考え

© 2026 Information Processing Society of Japan

る．各 $i = 1, \ldots, n$ について，指し手 $\mathfrak{m}_i$ の直前の局面におけるこの総和を S_i とする．手順の前後で局面が一致するため，終局面における総和も S_1 に等しく，これを S_{n+1} とおく．

これらの駒は，手順中に相手玉を睨むようになることも，敵に取られることもない．また，相手玉を睨む駒が睨まなくなることや，相手玉を睨まない位置に駒を打つこともない．したがって，この総和の変化に寄与するのは，開き王手を行う自駒の移動だけである．特に，敵の応手によってこの総和は変化しない．

$\mathfrak{m}_i$ が直接王手の場合，この総和は変化せず，注意 4.5 で述べたように $\operatorname{dang} \mathfrak{m}_i = 0$ である．一方，$\mathfrak{m}_i$ が開き王手の場合，注意 4.5 で述べたように，$\operatorname{dang} \mathfrak{m}_i$ は移動する駒が敵玉においてなす角度の，移動前の値から移動後の値を引いたものに等しい．よって，いずれの場合も

$$\operatorname{dang} \mathfrak{m}_i = S_i - S_{i+1}$$

が成り立つ．したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{dang} \mathfrak{m}_i = \sum_{i=1}^{n} (S_i - S_{i+1}) = S_1 - S_{n+1} = 0$$

を得る． □

以上より，命題 4.1 が示された．

5. 定理 1.1 の証明

この節では，定理 1.1 の証明を完了させる．命題 4.1 により，手順中には必ず開き王手が含まれる．そこで，どの駒種が開き王手を行い得るかを調べる．

手順を実現する 2 人の対局者を「自分」および「敵」とし，自分の開き王手を行う駒を考える．

以下，格子点の座標軸は，敵玉の位置を原点 $(0, 0)$ とし，敵陣に向かう向きを y 軸正の向き，自陣に向かう向きを y 軸負の向きとするようにとる．

まず，玉を睨んでいない駒は取られないので，盤上の移動のみでもとの位置に戻ることができる駒でなければならない．したがって，金（成駒含む），銀，飛，竜，角，馬のいずれかである．

次に，命題 3.3 でもみたように，移動する手は必ず開き王手でなければならないから，相手玉の縦・横・斜め 8 方向のいずれかのラインから別のラインへの移動でなければならない．すると，たとえば金に関しては，相手玉を睨まないような移動は，

- $(\pm 2, 0)$ から $(\pm 1, 1)$
- $(\pm 1, 1)$ から $(0, 2)$

のみである．これらの移動のみでもとの位置に戻ることはできないので，結局，金は開き王手を行うことができない．

同様に考えると，銀は $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ の 3 点の間の移動，飛車および竜は $(\pm t, \pm t)$（複号任意，t は正の整数）の間の移動，角および馬は $(\pm t, 0), (0, \pm t)$ の間の移動のみに限られる．順番に見ていこう．

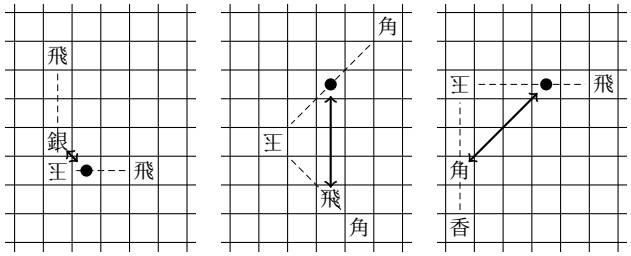


図 2 銀，飛，角による開き王手の例

まず，銀による開き王手ができないことは [6] ですでに示されている．

補題 5.1 ([6])**.** 手順中に，銀の移動による開き王手はない．

証明. $(1, 0)$ と $(0, 1)$ の間の移動と $(-1, 0)$ と $(0, 1)$ の間の移動の 2 通りがあるが，駒の利きは左右対称であるから，$(1, 0)$ と $(0, 1)$ の間の移動が不可能であることを示せば十分である．

系 3.4 より，自玉は $(1, 0)$ からも $(0, 1)$ からも敵の何らかの駒で睨むことができる位置にいなければならない．ところが，2 点 $(1, 0), (0, 1)$ を通る直線上に自玉があってはならない．なぜならば，もし自玉が $(t+1, -t)$（t は正の整数）にあったとすると，$(1, 0)$ から $(0, 1)$ に移動する手が王手解除になり得ず，自玉が $(-t, t+1)$ にあったとすると，$(0, 1)$ から $(1, 0)$ に移動する手が王手解除になり得ないからである．

よって，自玉は $(2, 1), (1, 2), (1, 1), (1, -1)$ のいずれかにいなければならない．しかし，$(1, 1)$ と $(1, -1)$ では双方の玉が隣りあうことになってしまうので，残る候補は $(2, 1), (1, 2)$ の 2 つである．

まず，$(2, 1)$ に自玉がいる場合を考えよう．このときは，$(1, 0)$ から $(0, 1)$ に移動するときを考える．すると，この手が開き王手であることと系 3.4 より，敵玉を睨む自分の飛車（または竜）が 2 枚，自玉を睨む敵の飛車（または竜）が 1 枚の計 3 枚が必要となる．しかし，通常の将棋には飛車は双方合わせて 2 枚しかないため，これは不可能である．また，$(1, 2)$ の場合は，$(0, 1)$ から $(1, 0)$ に移動するときを考えれば，同様に飛車または竜が 3 枚必要となるため不可能である． □

次に，飛車や竜での開き王手ができないことを示す．

補題 5.2. 手順中に，飛車または竜の移動による開き王手はない．

証明. 敵玉を睨まない自分の飛車または竜を移動させるとき，この手が開き王手であることと命題 3.3 より，敵玉を睨む自分の角（または馬）が 2 枚必要である．したがって，このとき相手玉を睨まない角（または馬）は存在しない．一方で，命題 4.1 より，敵にも開き王手を行う駒がある．すでに述べた通り，この駒は銀でも角や馬でもないので，飛車ま

© 2026 Information Processing Society of Japan

自玉の位置	自分の角の位置		敵の角の位置	
L	A	A′	B	B′
$(t,-t)$	$(t,0)$	$(0,-t)$	-	
$(2,-1)$	$(1,0)$	$(0,-1)$	$(2,0)$	$(1,-1)$
$(3,-2)$	$(2,0)$	$(0,-2)$	$(3,0)$	$(1,-2)$
$(1,-2)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(0,-2)$	$(1,-1)$
$(1,-3)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(0,-3)$	$(1,-2)$
$(1,-2)$	$(2,0)$	$(0,-2)$	$(1,0)$	$(-1,-2)$

表 1 自玉および双方の角の位置の候補

たは竜である. よって, ふたたび命題 3.3 により, 自玉を睨む敵の角（または馬）が常に少なくとも 1 枚あるはずである. すると, 角または馬が計 3 枚必要となる. しかし, 通常の将棋には角は双方合わせて 2 枚しかないため, これは不可能である. □

よって, 開き王手を行う駒の駒種は角または馬に限られる. 命題 4.1 より, 2 枚の角は自分および敵の開き王手を行う駒として使い切ってしまうので, 角のラインで相手玉を睨むことはできない. ただし, 斜め方向でも, 隣接する位置からは銀や金で相手玉を睨むことができる.

以上を踏まえ, 自玉の位置と, 自分の角または馬が移動する位置の候補を絞る. 移動元と移動先は, 開き王手によって利きが通るライン上にある. 一方, 移動元と移動先では, この角または馬は敵玉を睨まないため, これらの点は敵玉を通る斜めのライン上にはない. したがって, いずれの点も敵玉を通る縦または横のライン上にある. また, これらの点の間を角または馬が移動できなければならない.

系 3.4 より, これらの点は, 敵駒が自玉を睨むライン上にもなければならない. そこで, 補題 5.1 の証明と同様に, 各移動について自玉の位置の候補を求め, 必要な睨みを実現する駒種と枚数を調べる. このとき, 飛車または竜の合計は, 双方合わせて 2 枚を超えてはならない.

例えば, 自玉の位置が $(2,2)$ であり, 自分の角の位置が $(2,0),(0,2)$ である場合には, 飛車または竜が計 3 枚必要となる. しかし, 通常の将棋には飛車は双方合わせて 2 枚しかないため, この場合は除外される. ほかの場合も同様に調べると, 自玉の位置と自分の角が移動する位置の候補は, **表 1** に示すものに絞られる. ただし, 駒の利きは左右対称であるから, 自玉の位置の x 座標が非負のもののみを記している.

次に, 各候補について, 敵の角または馬が移動する位置を調べる. 双方を入れ替えて同様の列挙を行うことで, 敵の角または馬の移動位置の候補が得られる.

ただし, 双方の角または馬の移動線分が一致する場合や, 一方の移動線分が他方の移動線分を含む場合は除外される. 実際, このような場合には, 外側の線分上を移動する角または馬は, その移動の際に, 内側の線分上にある相手の角または馬を取るか飛び越えなければならない. しかし, 開き王手を行う駒が相手に取られることはなく, 角または馬は駒を飛び越えることもできない.

たとえば, 自玉の位置が $(t,-t)$ である候補では, 双方を入れ替えて得られる移動線分が自分の角または馬の移動線分と一致するため, 敵の角または馬の移動位置は存在しない. これ以外の候補についても, 移動線分の一致または包含が生じる候補を除外すると, 敵の角または馬が移動する位置は, 表 1 に示すものに絞られる.

残った候補についてはいずれも, 双方の角が手順中に位置する点は 2 点ずつのみである. 表のように, それぞれの点を $\mathrm{A},\mathrm{A}',\mathrm{B},\mathrm{B}'$ とする. このとき, A と B は同じ半平面上に, A′ と B′ は（もう一方の）同じ半平面上にある. A,B が含まれる半平面を $\mathbb{H}$, A',B' が含まれる半平面を $\mathbb{H}'$ とする. また, 敵玉および自玉の位置する点をそれぞれ K,L とする. 以下, (i) 表の一番下以外の 4 つの候補, (ii) 表の一番下の候補の 2 つに場合分けして考える.

まず, (i) 表の一番下以外の 4 つの候補について考えよう. これらの場合においては, 線分 BK 上に A がある. よって, 敵の角が B に移動するとき, 自分の角は A′ にいなければならない. なぜならば, もし自分の角が A にいたとすると, 半直線 AB 上にある駒は敵玉に王手をかけることができないので, 敵の角を B に移動する手が敵玉にかけられた王手を解除する手になり得ないからである. したがって, 命題 3.8 で定義した $\mathrm{dis}\,\mathbb{H}$ の値は 1 である.

一方で, 線分 A′L 上には B′ がある. よって同様の議論により, 自分の角が A′ に移動するとき, 敵の角は B にいなければならないことが分かる. このとき $\mathrm{dis}\,\mathbb{H}=2$ となり, 矛盾が生じる.

最後に, (ii) 表の一番下の候補について考える. この場合においては, 線分 AK 上に B がある. よって, 自分の角が A から A′ に移動するとき, 敵の角は B′ にいなければならない. なぜならば, もし敵の角が B にいたとすると, 半直線 BA 上にある駒は敵玉に王手をかけることができないので, 自分の角を移動する手が開き王手になり得ないからである. したがって, 命題 3.8 で定義した $\mathrm{dis}\,\mathbb{H}$ の値は 1 である.

一方で, 線分 B′L 上には A′ がある. よって同様の議論により, 敵の角が B′ から B に移動するとき, 自分の角は A にいなければならないことが分かる. このとき $\mathrm{dis}\,\mathbb{H}=2$ となり, 矛盾が生じる.

以上ですべての場合において矛盾が示せた. すなわち, 定理が証明された.

6. チェスにおける証明

4 節までの内容はすべて, チェスにおいて双方連続王手の千日手の存在について考えるときにも同様に成り立つ. そこで, これらの節で示した事実を用いて, チェスにおいても双方連続王手の千日手は成立しないことを証明する.

© 2026 Information Processing Society of Japan

なお以下では, 前節までとの用語の対応を明確にするため, キングを玉, チェックを王手とよび, 対局者についても白番・黒番ではなく自分・敵という呼称を用いる.

チェスでは取った駒を再び盤上に戻すことができないため, 同一局面へ戻る手順に駒を取る手は含まれない. また, 命題 2.2 より玉は移動できず, 駒を取ることもできない. したがって, 合駒で解除できないポーンやナイトによる王手は生じない.

定義 6.1. ℓ を, いずれかの玉の位置する点を始点とし, 縦・横・斜め 8 方向（クイーンの利きがある方向）のいずれかに伸びる半直線とする. もし ℓ 上にある相手の駒がこの玉に王手をかけるような局面が手順中に存在するならば, ℓ は**王手発生ライン**であるということにする.

補題 6.2. 手順中のすべての指し手は, 自玉のある王手発生ラインから別の王手発生ラインに移動する手であると同時に, 敵玉のある王手発生ラインから別の王手発生ラインに移動する手でもある.

証明. 手順中のすべての手は，盤上の駒を移動させる手である．そのうちの一つが，自駒 P が点 A から点 B へ移動する手であるとしよう.

まず，自玉の王手発生ラインについて考える．この手は敵駒による自玉への王手を解除する手であるから，点 B は自玉の王手発生ライン上にある．また，手順の前後で局面が一致するため，手順中には，自分の同種の駒が点 A へ移動する手がある．この手も自玉への王手を解除する手であるから，点 A も自玉の王手発生ライン上にある．さらに，もし点 A と点 B が同じ王手発生ライン上にあったとすると，点 A から点 B への移動で自玉の王手を解除するには，王手をかけている敵駒を取るか飛び越える必要があり，いずれも不可能である.

次に，敵玉の王手発生ラインについて考える．P が敵玉を睨まない駒である場合，P の移動は開き王手であるから，点 A は敵玉の王手発生ライン上にある．また，命題 3.3 より，点 B をまたいで敵玉を睨む自駒 Q が存在し，P が B にいる間，Q は移動せず，敵に取られることもない．手順を循環的に考えれば，P はいずれ点 B から移動する．その手では，このラインで開き王手が生じるため，点 B も敵玉の王手発生ライン上にある．さらに，A と B が同じライン上にあれば，点 A から点 B への移動で開き王手を成立させるには，利きを開かれる自駒を飛び越えなければならず，不可能である.

P が敵玉を睨む駒である場合，P の移動は直接王手であるから，点 B は敵玉の王手発生ライン上にある．また，自分の同種の駒が点 A へ移動する手では，移動後の駒が敵玉を睨むため，この手も直接王手である．したがって，点 A も敵玉の王手発生ライン上にある．さらに，もし点 A と点 B が同じ王手発生ライン上にあったとすると，点 A から点 B への移動で敵玉に王手をかけるには，点 A と敵玉の間で利きを遮る駒を取るか飛び越える必要があり，いずれも不可能である.

よって，双方の玉について，移動元と移動先は異なる王手発生ライン上にある. □

定義 6.3. 自玉の王手発生ラインと敵玉の王手発生ラインの交点を**交差点**ということにする.

補題 6.2 は, 「すべての指し手は, 同じ王手発生ライン上にない 2 つの交差点の間の移動に限る」ということを意味している.

補題 6.4. ある玉のある王手発生ライン上にある交差点を, 玉に近い方から順に $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ とする.

(1) このライン上の駒 P がこの玉に王手をかけるとき, P の位置は A_2 であるか, A_2 よりも玉から遠い位置である. 特に, 1 つの王手発生ライン上には少なくとも 2 つの交差点がある.

(2) さらに, 王手をかける駒 P が A_2 にあるときは, P は手順中のどこかで移動する.

証明. (1) P の王手に対する合駒を Q とする. 補題 6.2 より合駒 Q は交差点上になければならないから, P は A_1 より玉から遠い位置にいる. いま, P が A_1 と A_2 の間にあったとしよう. このとき, 王手をかけている駒 P は交差点にないので移動しない. すると, 玉と P の間にある交差点が 1 つしかないことにより, P の王手の利きを遮ることができるのは Q のみであるから, 合駒 Q もこれ以降動くことはできない. したがって, 同一局面に戻ることができず, 矛盾である.

(2) P が A_2 にあるときも, 玉と P の間にある交差点が 1 つしかないから, P の王手の利きを遮ることができるのは Q のみである. よって, これ以降 Q が動くためには先に P が動かなければならない. □

定義 6.5. ℓ を, 自玉の位置する点 L を始点とする半直線とする. 定義 4.2 にならい, 半直線 ℓ が**自玉においてなす角度**を, ℓ 上の任意の点 $\mathrm{A} \neq \mathrm{L}$ が自玉においてなす角度として定義する. 同様に, k を敵玉の位置する点 K を始点とする半直線とする. 半直線 k が**敵玉においてなす角度**を, k 上の任意の点 $\mathrm{B} \neq \mathrm{K}$ が敵玉においてなす角度として定義する.

$\mathbb{H}$ を半平面とする. 自玉から縦・横・斜め 8 方向のいずれかに伸びる半直線のうち, $\mathbb{H}$ に含まれるものは 3 本または 4 本である. これらのうち, なす角度が 45 度以下のものを ℓ_1, なす角度が 45 度より大きく 90 度以下であるものを ℓ_2, なす角度が 90 度より大きく 135 度以下であるものを ℓ_3 とする. また, なす角度が 135 度より大きいものが存在するときは, これを ℓ_4 とする.

同様に, 敵玉から縦・横・斜め 8 方向のいずれかに伸び

© 2026 Information Processing Society of Japan

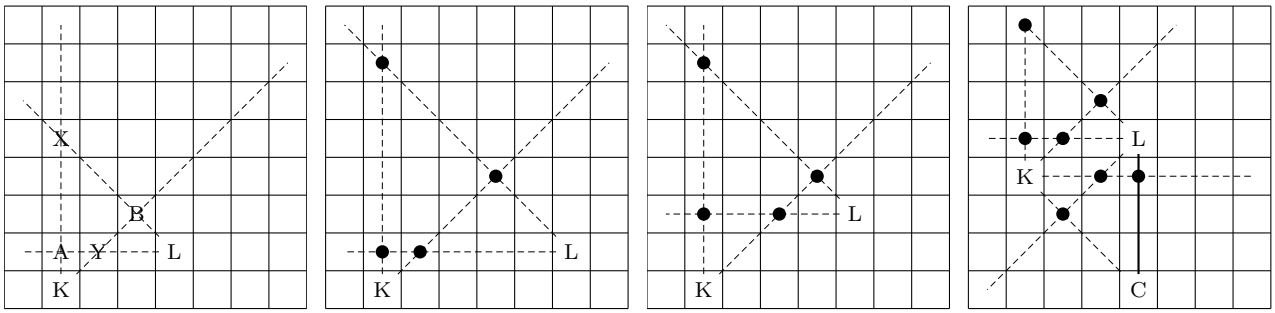


図 3 双方の玉の位置（K および L）と王手発生ライン（破線）の候補

る半直線のうち $\mathbb{H}$ に含まれるものについても, なす角度が小さい順に k_1, k_2, k_3, k_4 とする.

i, j を $1, 2, 3, 4$ のいずれかとし, ℓ_i は k_j と交点をもつとする. このとき, 三角形の内角の和は 180 度であることと, ℓ_i と k_j に挟まれた角の大きさは 45 度以上であることより, ℓ_i が自玉においてなす角度と k_j が敵玉においてなす角度の和は 135 度以下である. よって, ℓ_4 はどの k_j とも交点をもたないし, ℓ_3 が交点をもつ可能性があるのは k_1 のみである.

したがって補題 6.4(1) より, ℓ_3, ℓ_4 は王手発生ラインでない. 同様に, k_3, k_4 も王手発生ラインでない. ゆえに, ふたたび補題 6.4(1) より, もし半平面 $\mathbb{H}$ 上に王手発生ラインがあるならば, ℓ_1, ℓ_2, k_1, k_2 の 4 本が王手発生ラインであり, ℓ_1 と k_1, ℓ_1 と k_2, ℓ_2 と k_1, ℓ_2 と k_2 が交点をもつ.

このことから, 双方の玉の位置と王手発生ラインとしてあり得るのは, 平行移動や回転, 反転により一致するものを除くと**図 3** の 4 つに絞られる.

ところが, 左側の 3 つの候補では, 補題 6.2 の条件をみたすような移動は, 左図の A と B の間をナイトが移動する場合のみである. 一方で, 手順中は双方の対局者が駒を動かす必要があるので, 盤上には少なくとも 2 つの移動できる駒がなければならないが, これは不可能である.

また, 一番右の候補では, 例えば半直線 LC 上の駒 P が L にある玉に王手をかけているときを考える. 補題 6.4 より, P は C にあり, しかもいずれ C から別の位置に移動しなければならないが, 補題 6.2 の条件をみたすような移動は不可能である.

以上より, チェスの場合において双方連続王手の千日手が成立しないことが示された.

なお, 図 3 の左上の配置において, X と Y の間を移動できるキャメル（camel）というフェアリー駒を用いれば, 双方連続王手の千日手が実現する. この例は Noam Elkies によるものであり, 文献 [8] の番号 125 の記事で紹介されている.

7. おわりに

本稿では，通常の将棋および通常のチェスにおいて，双方の指し手がすべて王手であり，かつ同一局面に戻る手順が存在しないことを示した．ただし，将棋における証明では，通常の将棋に存在する飛車および角の枚数を用いている．この駒数の制約が，将棋における不可能性そのものに本質的であるかどうかは明らかでない.

今後の課題として，駒の利き，駒数，および持駒に関する規則に応じて，双方連続王手による同一局面反復が不可能となる条件を明らかにすることが挙げられる.

参考文献

[1] 日本将棋連盟, 対局規則, https://www.shogi.or.jp/match/taikyoku_rules/
[2] 林忠一郎, 将棋の結論とグラフ理論, コンピュータ将棋協会誌, Vol. 10, pp. 70–75, 1997.
[3] やねうらお, 双方連続王手の千日手は成立しない, https://yaneurao.hatenadiary.com/entry/20080604/p1
[4] やねうらお, 双方連続王手の千日手は成立しない part2, https://yaneurao.hatenadiary.com/entry/20080607/p1
[5] take-w1, 双方連続王手の千日手思いつきその 3, https://take-w1.hatenadiary.org/entry/20080609/p1
[6] take-w1, 双方連続王手の千日手思いつきその 4, https://take-w1.hatenadiary.org/entry/20080614/p1
[7] なんか，将棋およびチェスにおいて双方連続王手の千日手が成立しないことの証明, 2024, https://drive.google.com/file/d/112OOpL7sObJCkxaviVEEHNerLvTwpXCD/view
[8] Tim Krabbé, Open chess diary 121–140, https://timkr.home.xs4all.nl/chess2/diary_7.htm

© 2026 Information Processing Society of Japan