誕生日4日までに生まれる非不偏ゲーム数の新しい下界

小野 廣隆[1]

概要：非不偏ゲームの二人のプレイヤーを左（Left）と右（Right）と呼び，その誕生日をゲーム木の深さとする．異なるゲーム木であっても，任意のゲームとの和で同じ勝敗を与えるものを同一視し，その同値類をゲーム値と呼ぶ．ゲーム値全体は左にとっての有利さにより半順序をなす．誕生日が n 以下のゲーム値の集合を G_n，その個数を $g(n) = |G_n|$ とするとき，$g(0) = 1, g(1) = 4, g(2) = 22, g(3) = 1474$ は既知であるが，$g(4)$ は未解明である．ただし $g(4)$ の上下界に関する研究は進んでおり，例えば末續によって下界 $10^{28.2}$ と上界 $4.0 \cdot 10^{184}$ が示されている．本研究では，G_i から G_{i+1} の部分集合を得るシステマティックな手法を提案し，これに基づき $g(4)$ の下界を改善する．提案手法を G_4 に適用した厳密計算では，従来の下界の約 9,000 万倍に当たる $g(4) \geq 142593374167316950517402165409574065 9 > 1.4259 \cdot 10^{36}$ を得た．

キーワード：組合せゲーム理論，非不偏ゲーム，標準形，反鎖，整数計画，認定計算

A New Lower Bound on the Number of Partizan Games Born by Day 4

Hirotaka Ono[1]

Abstract: The two players of a partizan game are called Left and Right, and its birthday is the depth of its game tree. Even when two game trees are different, they are identified if they give the same outcome when added to any game; the resulting equivalence classes are called game values. The set of game values forms a partial order according to preference for Left. Let G_n be the set of game values with birthday at most n, and let $g(n) = |G_n|$. The values $g(0) = 1$, $g(1) = 4$, $g(2) = 22$, and $g(3) = 1474$ are known, but $g(4)$ remains unknown. Research on bounds for $g(4)$ has continued; for example, Suetsugu established the lower bound $10^{28.2}$ and the upper bound $4.0 \cdot 10^{184}$. We propose a systematic method for obtaining a subset of G_{i+1} from G_i and use it to improve the lower bound on $g(4)$. For G_4, an exact computation with the proposed method yields $g(4) \geq 142593374167316950517402165409574065 9 > 1.4259 \cdot 10^{36}$, about 90 million times the previous lower bound.

Keywords: combinatorial game theory, partizan games, canonical form, antichain, integer programming, certified computation

1. はじめに

組合せゲーム理論における非不偏ゲームは，左右のプレイヤーの選択肢の集合 G^L, G^R が異なりうる二人ゲームであり，それらを用いて $G = \{G^L \mid G^R\}$ と表される．異なるゲーム形式が同じゲームを表すことがある．後に定める順序に関して互いに等しいゲーム形式を同一視し，その同値類をゲーム値と呼ぶ．各ゲーム値には冗長な選択肢を含まない表現がただ一つ存在し，これを標準形という．誕生日はゲーム値の複雑さの基本的な尺度であり，$0 = \{ \mid \}$ から何段階で生成されるかを表す．誕生日が n 以下のゲーム値の集合を G_n，その個数を $g(n) = |G_n|$ と書くと，$g(0) = 1$，$g(1) = 4$，$g(2) = 22$，$g(3) = 1474$ は既知である一方，$g(4)$ の正確な値は分かっていない．

Wolfe と Fraser [7] は一般の n に対する上下界を与えており，$n = 4$ の場合 $3.0 \cdot 10^{12} \leq g(4) \leq 10^{434}$ が得られる．これに対し Suetsugu [6] は G_3 の鎖分解を用いて $10^{28.2} \leq g(4) \leq 4.0 \cdot 10^{184}$ まで上下界を改善している．また 2026 年になって，$g(4)$ の上界を $5 \cdot 10^{174}$ [2] に，さらに $1.244 \cdot 10^{144}$ [3] へと改善する研究も発表されている．さらに，著者によるその後の認定計算では，本稿執筆時点で最良の上界 $g(4) < 10^{137}$ が得られており，計算証明書と検証

[1] 名古屋大学大学院情報学研究科
Graduate School of Informatics, Nagoya University

© 2026 Information Processing Society of Japan

手順が公開されている [5].

本研究ではまず反鎖の組 (L, R) が標準形 $\{L \mid R\}$ となるための十分条件を，打消し可能性を排除するヒッティング条件として与える．次に，この十分条件を多数の反鎖対へ一括して保証する概念を導入し，条件を満たす反鎖対を G_3 の順序構造上で計算機を用いて厳密に数え上げることで，Suetsugu の下界を改善する．本稿の主結果は

$$g(4) \geq 1425933741673169505174021654095740659 > 1.4259 \cdot 10^{36} \tag{1}$$

である．本稿の計算に用いた入力データ，主要な実験記録，計算証明書，独立検証器，および再現手順は，GitHub 上の計算アーティファクトとして公開している [4].

2. 準備

2.1 ゲームの代数

本研究は非不偏ゲーム（以下ゲーム）を扱う [1]．ゲーム G は左右の選択肢の集合 G^L, G^R により $G = \{G^L \mid G^R\}$ と再帰的に定まり，G^L, G^R の元自身もゲームである．いずれのプレイヤーにも選択肢がないゲームを $0 = \{\,|\,\}$ と書く．本稿では，どの選択肢の列も有限回で終わる短ゲームのみを扱う．

ゲーム間の順序を定義するため，直和と反転を導入する．G と H の直和，および G の反転を

$$\begin{aligned} G + H &= \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}, \\ -G &= \{-G^R \mid -G^L\} \end{aligned}$$

と定め，$G - H = G + (-H)$ と書く．ただし，例えば $G^L + H$ は $\{g^L + H : g^L \in G^L\}$ を表す．

ゲームと 0 の順序を

$$\begin{aligned} G \leq 0 \quad &\iff \quad \forall g^L \in G^L :\ \neg(0 \leq g^L), \\ 0 \leq G \quad &\iff \quad \forall g^R \in G^R :\ \neg(g^R \leq 0) \end{aligned}$$

により再帰的に定め，$G \leq H \iff G - H \leq 0$ とする．$G \leq H$ かつ $H \leq G$ のとき G, H は同じゲーム値を表し，$\leq$ はゲーム値の集合上の半順序を与える．

この定義から，二つのゲームの順序は，片方の左選択肢ともう片方の右選択肢だけを用いて次のように書ける．

補題 1. 有限ゲーム $G = \{G^L \mid G^R\}$ と $H = \{H^L \mid H^R\}$ に対し，

$$\begin{aligned} G \leq H \quad \iff \quad &\left(\forall g^L \in G^L : \neg(H \leq g^L)\right) \\ &\wedge \left(\forall h^R \in H^R : \neg(h^R \leq G)\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. $G - H$ の左選択肢は $g^L - H$ と $G - h^R$ である．従って，順序の再帰的定義より

$$\begin{aligned} G \leq H &\iff G - H \leq 0 \\ &\iff \left(\forall g^L \in G^L : \neg(0 \leq g^L - H)\right) \\ &\quad \wedge \left(\forall h^R \in H^R : \neg(0 \leq G - h^R)\right), \end{aligned}$$

となり，結論を得る． □

左選択肢 $g_1^L \in G^L$ が劣位であるとは，$g_1^L \leq g_2^L$ を満たす別の左選択肢 $g_2^L \in G^L$ が存在することをいう．左選択肢 $g^L \in G^L$ が打消し可能であるとは，ある右選択肢 $x \in (g^L)^R$ が存在して $x \leq G$ となることをいう．右選択肢についても，それぞれ左右の役割を入れ替えて対称的に定義する．劣位な選択肢は同じ側のより有利な選択肢に支配される冗長な手であり，打消し可能な選択肢は相手の応手によって元の局面以下，あるいは以上へ戻される冗長な手である．いずれも削除してもゲーム値は変わらない．ゲーム形式 $G = \{G^L \mid G^R\}$ が標準形であるとは，G^L および G^R のすべての選択肢が標準形であり，かつ G が劣位な選択肢も打消し可能な選択肢も持たないことをいう．短ゲームでは各ゲーム値が一意な標準形をもつので，ゲーム値を数えることは標準形を数えることに対応する．

2.2 誕生日と既存の下界

誕生日は 0 から何段階で生成されるかを表す．$G_0 = \{0\}$ とし，選択肢がすべて G_n に属するゲームの値全体を G_{n+1} とすると，G_n は誕生日が n 以下のゲーム値全体である．誕生日が有限なゲームはすべて短ゲームであり，G_2 は $*$ や $*2$ のような不偏な値も含む．

本研究の目的は G_4 に入る標準形のゲームの総数を下から見積もることにある．これに対する素直な方針は，確実に標準形であることを保証するようなゲームの集合を見つけ，その数を計測することである．Suetsugu [6] は片側を整数一つに固定したゲームを考えることによりこれを実現している．$S \subseteq G_3$ が反鎖ならば，$\{3 \mid S\}$，$\{2 \mid S\}$，$\{S \mid -3\}$，$\{S \mid -2\}$ は標準形となる．従って G_3 の反鎖の族を構成すれば，その 4 倍の標準形が得られる．G_3 の層構造を用いた反鎖数の評価から $10^{28.2}$ が導かれる．

3. 安全な反鎖対

非不偏ゲームの半順序 $\leq$ は $G \leq H \iff H - G \geq 0$ で定まる [1]．整数 $i \geq 1$ に対し，$G = \{L \mid R\} \in G_{i+1}$ の選択肢はすべて G_i に属するので $L, R \subseteq G_i$ である．$g_1^L \leq g_2^L$ なる $g_1^L, g_2^L \in L$ があれば g_1^L は劣位で，除いてもゲーム値は変わらない．よって標準形では L, R はいずれも半順序集合 $(G_i, \leq)$ の反鎖であることが必要である．また $\ell \in L$ に対し，ある $y \in \ell^R$ が $y \leq \{L \mid R\}$ を満たすとき ℓ は打消し可能な選択肢となる．本研究ではこの打消し可能性をヒッティング条件によって排除できる点に注目し，ゲーム数の下界導出に用いる．

反鎖 $L, R \subseteq G_i$ に対し $Z(L) = \bigcup_{\ell \in L} \ell^R$，$W(R) =$

© 2026 Information Processing Society of Japan

$\bigcup_{r\in R} r^L$ と置く．これらは L の元の右選択肢全体，R の元の左選択肢全体であり，G_{i-1} の部分集合である．また $y,x \in G_{i-1}$ に対し $D_i(y) = \{u \in G_i : u \le y\}$，$U_i(x) = \{v \in G_i : x \le v\}$ と定める．

命題 1. $L, R \subseteq G_i$ がともに $(G_i, \le)$ の反鎖であり，

$$\forall y \in Z(L):\ R \cap D_i(y) \neq \emptyset, \tag{2}$$
$$\forall x \in W(R):\ L \cap U_i(x) \neq \emptyset \tag{3}$$

が成り立つならば，$\{L \mid R\}$ は標準形である．

証明. 反鎖性より L, R は劣位な選択肢を含まない．$\ell \in L$ が打消し可能とすると，ある $y \in \ell^R \subseteq Z(L)$ が $y \le X := \{L \mid R\}$ を満たす．条件 (2) よりある $r \in R \cap D_i(y)$ が存在して $r \le y \le X$ となるが，X の右選択肢 r が $r \le X$ を満たすことはないので矛盾する．右側も同様である． □

条件 (2), (3) を満たす反鎖対を安全な反鎖対と呼ぶ．標準形の一意性から，相異なる安全な反鎖対は相異なるゲーム値を与えるので，その個数はそのまま $g(i+1)$ の下界となる．安全性は L と R の両方に依存するため，左右を独立に選ぶことはできない．そこで，固定した反鎖対 (T_L, T_R) を常に左右の選択肢へ含めることで，多数の反鎖対に対し安全性を一括して保証する．

定義 1. 整数 $i \ge 1$ を固定する．反鎖対 (T_L, T_R) に対し $S_L(T_R) = \{\ell \in G_i : \forall y \in \ell^R,\ T_R \cap D_i(y) \neq \emptyset\}$，$S_R(T_L) = \{r \in G_i : \forall x \in r^L,\ T_L \cap U_i(x) \neq \emptyset\}$ とする．$T_L \subseteq S_L(T_R)$ かつ $T_R \subseteq S_R(T_L)$ が成り立つとき，(T_L, T_R) を許容核ペアと呼ぶ．

系 1. (T_L, T_R) を許容核ペアとする．反鎖 $L, R \subseteq G_i$ が $T_L \subseteq L \subseteq S_L(T_R)$ かつ $T_R \subseteq R \subseteq S_R(T_L)$ を満たすならば，(L, R) は安全な反鎖対である．

実際, $L \subseteq S_L(T_R)$ と $T_R \subseteq R$ から式 (2) が, $R \subseteq S_R(T_L)$ と $T_L \subseteq L$ から式 (3) が従う．

4. 下界導出の計算法

前節に引き続き，整数 $i \ge 1$ を固定する．

4.1 最大許容核ペアを求める整数計画定式化

許容核ペアと，それを含む反鎖 $A_L \supseteq T_L$，$A_R \supseteq T_R$ を同時に選ぶ問題を 0–1 整数計画として定式化する．比較可能な相異なる元の組全体を

$$\mathcal{C} = \{\{p,q\} \subseteq G_i : p \neq q,\ p \le q \text{ または } q \le p\}$$

とする．各 $g \in G_i$ に，$g \in A_L, A_R, T_L, T_R$ をそれぞれ表す 0–1 変数 a_g, b_g, u_g, v_g を置く．また，添字の集合を

$$\mathcal{H}_L = \{(\ell, y) : \ell \in G_i,\ y \in \ell^R\},$$
$$\mathcal{H}_R = \{(r, x) : r \in G_i,\ x \in r^L\}$$

とする．整数計画は

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & \sum_{g\in G_i} (a_g - u_g + b_g - v_g) \\
\text{subject to}\quad & u_g \le a_g,\quad v_g \le b_g && (g \in G_i),\\
& a_p + a_q \le 1 && (\{p,q\} \in \mathcal{C}),\\
& b_p + b_q \le 1 && (\{p,q\} \in \mathcal{C}),\\
& \sum_{r\in D_i(y)} v_r \ge a_\ell && ((\ell, y) \in \mathcal{H}_L),\\
& \sum_{\ell\in U_i(x)} u_\ell \ge b_r && ((r, x) \in \mathcal{H}_R),\\
& a_g, b_g, u_g, v_g \in \{0,1\} && (g \in G_i)
\end{aligned} \tag{4}$$

である．最初の制約は $T_L \subseteq A_L$，$T_R \subseteq A_R$ を表し，次の二種類は A_L, A_R の反鎖条件である．二つの和の制約はそれぞれ $A_L \subseteq S_L(T_R)$，$A_R \subseteq S_R(T_L)$ を表すヒッティング条件である．従って (T_L, T_R) は許容核ペアとなる．

目的値は

$$z = |A_L \setminus T_L| + |A_R \setminus T_R|$$

である．各 $E_L \subseteq A_L \setminus T_L$，$E_R \subseteq A_R \setminus T_R$ に対して $L = T_L \cup E_L$，$R = T_R \cup E_R$ とすれば，系 1 より (L, R) は安全な反鎖対である．従って，式 (4) の最適値を $z^\star$ とすると

$$g(i+1) \ge 2^{z^\star}$$

が従う．

4.2 固定核のもとでの欠損集合と被覆条件による計数

前小節の整数計画で得られるのは，固定した許容核ペアのもとで左右を独立に選ぶ単一の直積族である．以下では，同じ核を固定したまま，核だけでは満たされない左側の条件を右反鎖に肩代わりさせることにより，これをより大きな安全な反鎖対の族へ拡張する．

固定核の直積族.

許容核ペア $K^\star = (T_L, T_R)$ を固定し，$L = T_L \cup A$，$R = T_R \cup B$ とする．まず

$$P_L = \{\ell \in G_i \setminus T_L : T_L \cup \{\ell\} \text{ が反鎖 }\},$$
$$Q_L^+ = P_L \cap S_L(T_R),$$
$$Q_R^+ = \{r \in S_R(T_L) \setminus T_R : T_R \cup \{r\} \text{ が反鎖 }\}$$

とおく．$A \in \mathcal{A}(Q_L^+)$，$B \in \mathcal{A}(Q_R^+)$ ならば系 1 が適用できるので，左右を独立に選べる．この族を固定核の直積族と呼ぶ．

左右を連動させる拡張.

次に A の範囲を $\mathcal{A}(P_L)$ まで広げる．$L = T_L \cup A$ に対し

© 2026 Information Processing Society of Japan

$$\mathcal{H}(A) = \min_{\subseteq}\{D_i(y) : y \in Z(L)\},$$
$$\Delta(A) = \{H \in \mathcal{H}(A) : T_R \cap H = \emptyset\},$$
$$\Gamma(A) = \{x \in G_{i-1} : L \cap U_i(x) \neq \emptyset\}$$

とおく．$\min_{\subseteq}$ は包含関係に関する極小元だけを残す操作である．$\Delta(A)$ は，T_R だけでは満たされず，追加する右反鎖 B が覆うべき条件である．すなわち，任意の $H \in \Delta(A)$ に対して $B \cap H \neq \emptyset$ が成り立つことを要求する．一方，$\Gamma(A)$ は L が既に覆っている右側の打消し条件を表す．そこで

$$P_R(\Gamma) = \{r \in G_i \setminus T_R : T_R \cup \{r\} \text{ が反鎖},\ r^L \subseteq \Gamma\}$$

と定める．$B \in \mathcal{A}(P_R(\Gamma(A)))$ が $\Delta(A)$ を覆えば，式 (2), (3) がともに成り立つので，$(T_L \cup A, T_R \cup B)$ は安全な反鎖対である．

右反鎖に必要な情報を

$$\pi(A) = (\mathcal{H}(A), \Gamma(A))$$

とし，これを A の残差プロファイルと呼ぶ．同じプロファイルをもつ左反鎖には，同じ右候補ポセットと被覆条件を用いることができる．プロファイル π から定まる欠損集合を Δ_π，そのプロファイルをもつ左反鎖の個数を w_π とする．左側では $P_L \setminus Q_L^+$ から選ぶ元の個数により反鎖を層分解して w_π を計算する．

右側では，各プロファイルの右候補ポセット $P_R(\Gamma_\pi)$ の最大反鎖 M_π を固定し，$X_\pi = P_R(\Gamma_\pi) \setminus M_\pi$ とおく．$|B \cap X_\pi| = j$ を右側の層とし，Δ_π を覆う層 j の右反鎖数を $n_{j,\pi}$ とする．また，固定核の直積族については，$C_L = |\mathcal{A}(Q_L^+)|$ とし，Q_R^+ の右反鎖の層 j の個数を R_j とする．すると，任意の非負整数 t_0, t_π に対して

$$g(i+1) \geq C_L \sum_{j=0}^{t_0} R_j + \sum_{\pi:\Delta_\pi \neq \emptyset} w_\pi \sum_{j=0}^{t_\pi} n_{j,\pi} \qquad (5)$$

である．第 1 項は $\Delta(A) = \emptyset$ となる固定核の直積族，第 2 項は左右の依存を被覆条件として保った拡張であり，両者の左反鎖族は互いに素である．各 $n_{j,\pi}$ は，X_π 上の j 元反鎖を列挙しそれと比較可能な M_π の元を除いた後，残る M_π の部分集合のうち，Δ_π を覆うものを包除原理で数えることにより厳密に求められる．複数のプロファイルに対する右反鎖を別々に数える方法と，どの条件を覆ったかによって共通に分類して数える方法を併用できる．両者を併用するときは，共通部分を引いて和集合を数える．また，包除原理による完成数がいくつかの情報だけで決まる場合には，右反鎖をその情報で集約しても計数値は変わらない．第 5 節では，G_3 上で実際に用いた被覆情報と集約法を示す．

4.3 固定核を含まない領域の排反分割

固定した核 $T_0 \subseteq L$ のもとで式 (5) を計算すると，得られる左反鎖はすべて T_0 を含む．そこで，$T_0 = \{t_1, \ldots, t_k\}$ に順序を付け，$T_0 \nsubseteq L$ となる領域を

$$t_1 \notin L, \quad t_1 \in L,\ t_2 \notin L, \quad \ldots \quad , t_1, \ldots, t_{k-1} \in L,\ t_k \notin L$$

に分割する．これらの領域は互いに素であり，$T_0 \subseteq L$ である既存の族とも交わらない．以下，分割して得られる各領域をセルと呼ぶ．各セルで必須元と禁止元を加えた式 (4) を解き，得られた許容核ペアの周囲を再び数えれば，右反鎖族どうしの重なりを調べることなく各寄与を加算できる．

5. 計算結果と考察

本節では，まず G_2 から G_3 を構成する場合に，安全な反鎖対という十分条件そのものの性能を確認する．次に G_3 から G_4 について，第 4.1 節の整数計画による最大許容核ペアを第 5.2 節で，第 4.2 節の固定核のもとでの計数を第 5.3 節で，第 4.3 節の排反分割による追加を第 5.4 節で，それぞれ同じ順序で示す．最後に，得られた下界とその改善過程をまとめる．

5.1 G_2 から G_3 への適用

安全な反鎖対という十分条件がどの程度の標準形を与えるかを，G_2 の完全なリストから G_3 を構成する場合で調べた．G_2 の反鎖は空集合を含めて 98 個である．左右の反鎖をすべて調べ，命題 1 の条件を直接検査すると，安全な反鎖対は 1448 個であった．前節の欠損集合による計数と同様に，安全条件の検査に必要な情報を 23 種類に集約して数えた結果も 1448 であり，直接全数検査と一致した．従って，G_2 上では本手法の十分条件を満たす安全な反鎖対をすべて回収している．一方，$g(3)$ の真の値は 1474 なので，その割合は約 98.236% である．

Suetsugu [6] も同じ比較を行っており，最大層だけを用いる基本的な方法では 64，隣接する層まで用いる改良法では 208 を得ている．これらは真値の約 4.342%，14.111% に当たる．

同じ G_2 上で，前節の整数計画により許容核ペアから独立に選べる自由元の総数を最大化すると 4 であり，得られる下界は $2^4 = 16$ である．この比較を表 1 に示す．安全条件そのものは，末續法による 208 よりも真値に近い．一方，左右を独立に選べる単一の直積に限定すると大きな損失が生じることが分かる．従って許容核ペアは最終的な数え上げそのものではなく，安全な反鎖対の大きな族を構成するための出発点として用いる．

5.2 最大許容核ペアと単一直積族

ここからは，G_3 の順序構造を用いて G_4 に属する標準形の族を構成し，$g(4)$ の下界を求める．まず，式 (4) に $i = 3$

© 2026 Information Processing Society of Japan

表 1 G_2 から G_3 を構成する場合の比較

方法	個数	1474 に対する割合
単一の直積族	16	1.085%
末續法（基本）	64	4.342%
末續法（改良）	208	14.111%
安全な反鎖対	1448	98.236%
真値 $g(3)$	1474	100%

を代入した 0–1 整数計画を，Gurobi Optimizer 10.0.0 を用いて G_3 上で大域的に解いた．

最大化計算では目的値 98 の実行可能解を得た後も分枝限定を続け，上界も 98 となった時点で終了した．従って最適値は 98 であり，この整数計画に目的値 99 以上の解は存在しない．

以上より最適値は $z^\star = 98$ である．以下の計数に用いる最適解は

$$T_L = \{2, 11, 14\}, \qquad T_R = \{0, 3, 12, 21\}$$

で，$|A_L| = 23$，$|A_R| = 82$ である．従って単一の直積族だけから

$$g(4) \geq 2^{98} = 316912650057057350374175801344 \quad (6)$$

を得る．式 (6) の右辺は約 $3.1691 \cdot 10^{29}$ であり，Suetsugu [6] の下界 $10^{28.2}$ の約 20 倍である．従って単一の直積族だけでも従来の下界を改善するが，その改善は約 1.3 桁にとどまる．この最適解を採用したのは，左候補ポセットの全反鎖を数える一方，右候補ポセットを最大反鎖のまわりに層分解する，式 (5) の計算に適しているためである．次小節ではこの核を固定し，左右の依存を保ったまま直積族を拡張する．

5.3 固定核のもとでの欠損集合と被覆条件の計数

本小節では，前小節の最適核

$$T_L = T_0 = \{2, 11, 14\}, \qquad T_R = \{0, 3, 12, 21\}$$

を固定し，式 (5) を計算する．まず欠損集合 $\Delta(A)$ が空である左反鎖を数え，次に欠損集合が空でない左反鎖を残差プロファイルごとに加える．いずれの左反鎖も T_0 を含むため，この小節全体で得られる族は一つの領域 $T_0 \subseteq L$ に収まる．

固定核の直積族（欠損集合が空の場合）．

式 (6) では，最適化で得た左右の反鎖に含まれる自由元の部分集合だけを数えた．ここでは同じ許容核ペアを保ったまま，核だけで安全性が保証される反鎖をすべて利用する．左候補ポセットを

$$Q_L^+ = \{\ell \in S_L(T_R) \setminus T_L : T_L \cup \{\ell\} \text{ が反鎖 }\}$$

とおく．$A \in \mathcal{A}(Q_L^+)$ ならば $\Delta(A) = \emptyset$ であり，右反鎖に追加の被覆条件を課す必要はない．任意の $B \in \mathcal{A}(Q_R^+)$ との組は系 1 により安全であり，これは式 (5) の第 1 項に対応する．Q_L^+ は 114 元であり，その反鎖数は $C_L = |\mathcal{A}(Q_L^+)| = 319901739$ である．右候補ポセット Q_R^+ は 598 元であり，78 元の最大反鎖 M とその外側 X（520 元）へ分けた．右側を $j = |B \cap X|$ で層分解し，X 上の j 元反鎖を固定した後，それと比較可能な M の元を除いて残る部分集合を数えた．

層 j の右反鎖数を $R_j = |\{B \in \mathcal{A}(Q_R^+) : |B \cap X| = j\}|$ とする．層 0 から 6 までの R_j を表 2 に示す．これらから

$$C_L \sum_{j=0}^{6} R_j = 14167791287331154179322280681497140 27 \quad (7)$$

を得た．

表 2 最適許容核ペアに対する右反鎖の層

j	R_j
0	302231454903657293676544
1	409077855754872889809306 1
2	27737794359383582463945133
3	125650324515053753130545549
4	427941401789859828515725619
5	116950568597062843038935329 4
6	267356649125858753809012659 3

ここでは層 0 から 6 までを厳密に数え，層 7 以降は下界に含めていない．

左右を連動させる拡張（欠損集合が空でない場合）．

式 (7) では，$\Delta(A) = \emptyset$ となる左反鎖だけを数えた．さらに広い 237 元の左候補ポセット P_L を用いた．$P_L \setminus Q_L^+$ は 123 元であり，ここから選ぶ元の個数 $|A \cap (P_L \setminus Q_L^+)|$ を左側の層とする．左反鎖の総数は 27440861173 である．本実験では $\Gamma(A)$ はすべて同一であったため，残差プロファイルは $\mathcal{H}(A)$ によって区別できる．P_L の全反鎖を分類すると，欠損集合が空でない反鎖は層 1 から 18 に現れ，残差プロファイルは 30 種類であった．この共通の Γ に対する右候補ポセット $P_R(\Gamma)$ は 1238 元であり，82 元の最大反鎖 M_{res} とその外側 X_{res}（1156 元）へ分けた．

右反鎖は，既に覆った条件と，X_{res} から選んだ元によって M_{res} 上で選択できなくなる元の情報により集約した．この情報が同じ右反鎖は，M_{res} から選べる部分集合と欠損集合の被覆数が等しいため，一括して数えることができる．これは近似ではなく，式 (5) を厳密に計算するための集約であり，右側の層 5 までを数えた．

二つの右反鎖族の和集合．

プロファイルごとに個別に構成した右反鎖族と，30 種類のプロファイルに共通の右候補ポセット上で被覆条件を

© 2026 Information Processing Society of Japan

表 3 採用した三つのセル

左反鎖の条件	$z^\star$	層 0–2 の寄与
$11 \notin L$	98	429006808143331529538304640152603 8
$11 \in L,\ 2 \notin L$	95	54803350613906387175362099004732 6
$11, 2 \in L,\ 14 \notin L$	97	429006808143331529538304640152603 8

用いて構成した右反鎖族には重なりがある．前者を $\mathcal{B}_{\mathrm{prof}}$，後者を $\mathcal{B}_{\mathrm{cov}}$ とし，各プロファイル，各層について両者の共通部分を厳密に引いた．すなわち，各プロファイルについて

$$|\mathcal{B}_{\mathrm{prof}} \cup \mathcal{B}_{\mathrm{cov}}| = |\mathcal{B}_{\mathrm{prof}}| + |\mathcal{B}_{\mathrm{cov}}| - |\mathcal{B}_{\mathrm{prof}} \cap \mathcal{B}_{\mathrm{cov}}|$$

を計算した．単純な和を用いなかったのは，同じ安全な反鎖対を二度数えることを避けるためである．共通部分は 0 ではないので，これを引かなければ同じ安全な反鎖対を過大に数えることになる．層 5 までの和により

$$g(4) \geq 14168055720041638107115019403026412 57 \quad (8)$$

を得た．

5.4 固定核を含まない排反セルからの追加

式 (8) までに数えた左反鎖はすべて $T_0 = \{2, 11, 14\}$ を含む．従って，T_0 の少なくとも一元を含まない左反鎖の族は，既に数えた族と交わらない．順列 (a, b, c) に対し

$$a \notin L, \qquad a \in L,\ b \notin L, \qquad a, b \in L,\ c \notin L$$

という三つの条件を用いれば，$T_0 \not\subseteq L$ となる 7 個の包含パターンを互いに素な三つのセルへ分けられる．

各セル内で必須条件と禁止条件を付けた整数計画を解き，別の許容核ペアを求めた．さらに各核について候補ポセットの反鎖を層 2 まで数えた．順列 $(11, 2, 14)$ から得られた三つのセルとその寄与を表 3 に示す．三つの左反鎖族は互いに素であり，式 (8) の左反鎖族とも交わらないので，右反鎖族に重なりがあっても安全な反鎖対は重複しない．

排反性は左反鎖の所属条件だけから従う．実際，$11 \notin L$，$11 \in L, 2 \notin L$，$11, 2 \in L, 14 \notin L$ は同時には成立せず，$T_0 \subseteq L$ である既存族とも交わらない．従って各セルの寄与はそのまま加算できる．

三つのセルから得られる追加寄与は

$$9128169669005694462519713793099402 \qquad (9)$$

である．式 (8) と式 (9) の和が式 (1) の整数に一致する．

5.5 得られた下界

これまでの下界の改善過程を表 4 にまとめる．

表 4 の値はすべて完了した厳密計数に基づく整数値であり，推定値や未完了の候補は含めていない．

式 (1) は Suetsugu の表示値 $10^{28.2}$ より常用対数で約 7.95 桁大きい．単一の直積族で得た式 (6) と比べると約 $4.50 \cdot 10^6$ 倍である．この差からも，許容核ペアによる直積を求めた後，その周囲を層分解と欠損集合により拡張することが重要であることが分かる．

5.6 考察

最終的な計数だけを見ると，最初から左反鎖を選び，それに応じて右反鎖を数えればよいようにも見える．しかし許容核ペアには三つの役割がある．第一に，系 1 によって安全性を局所的な包含条件へ還元し，左右を独立に選べる直積族を与える．これは実装と検証の双方において最も単純な基準となる．第二に，$z^\star = 98$ という大域最適値によって，単一の直積族で得られる下界と，左右を連動させた計数による改善を分けて評価できる．第三に，固定された核は，残差プロファイルと被覆情報を定義し，さらに既存族と排反な領域を切り出すための基準となる．従って本研究では，許容核ペアによる方法を後の方法で置き換えているのではない．核によって安全な骨格を固定し，その外側を順に拡張している．

固定核のまわりの拡張では，まず核だけで安全性が保証される反鎖を数え，次に左反鎖を選んだ後に残る条件を右反鎖に負担させた．残差プロファイルと十分統計は，この左右が依存する計数を厳密に圧縮するためのものである．さらに，固定核を含まない領域を互いに素なセルへ分け，各セルに別の許容核ペアを置いた．

この意味で，本研究の流れは

$$\begin{aligned} \text{安全な反鎖対} &\longrightarrow \text{許容核ペアと直積族} \\ &\longrightarrow \text{固定核のまわりの依存計数} \\ &\longrightarrow \text{固定核外の排反セル分解} \end{aligned}$$

とまとめられる．単一直積の値に比べて最終値が約 $4.50 \cdot 10^6$ 倍となることは，核そのものの大きさだけでなく，核の周囲にある反鎖対を重複なく数えることが重要であることを示している．

6. まとめと今後の課題

安全な反鎖対という十分条件を導入し，許容核ペアの探索，欠損集合による分類，最大反鎖まわりの層分解を用いて $g(4)$ の下界を求めた．G_2 から G_3 を構成する場合には，欠損集合による集約計数が直接全数検査による安全な反鎖対の総数 1448 と一致した．従って本手法は十分条件を満たす安全な反鎖対をすべて回収し，真値 1474 の約 98.236% を与える．一方，単一の直積族は 16 に留まり，良い下界には左右を連動させる拡張が必要であることも分かる．

G_3 上では単一の直積族の最適自由度 98 を求め，固定した核のもとで残差プロファイルと被覆条件を用いて周囲の安全な反鎖対を数えた．さらに固定核を含まない領

© 2026 Information Processing Society of Japan

表 4 下界の主要な発展段階（すべて厳密な整数値）

段階	下界または追加寄与	内容
単一の直積族	$2^{98} = 316912650057057350374175801344$	左右を独立に選択
固定核・欠損なし（右層 0–6）	1416779128733115417932228068149714027	式 (5) の第 1 項
固定核・欠損あり（右層 0–5）	1416805572004163810711501940302641257	右層 0–5，重複を除いた累積値
固定核外の三セル	91281696690056944625197137930994 02	既存族と排反な追加寄与
最終結果	1425933741673169505174021654095740659	本稿の認定下界

域を互いに素なセルへ分割して別の許容核ペアを加え，$g(4) > 1.4259 \cdot 10^{36}$ という認定下界を得た．

ただし安全な反鎖対の条件は十分条件であり，必要条件ではない．真値 1474 との差である 26 個は，計数の不足ではなく，安全条件そのものから得られない標準形である．また，本稿の最終値は，構成して認定できた排反族の総数であって，安全な反鎖対全体の個数でも，この計数法の中での最適値でもない．

今後の課題は，採用したセルをさらに核の包含と非包含で分割すること，共通右族の層 6，標準形右族の層 7 を数えることである．

参考文献

[1] Albert, M. H., Nowakowski, R. J. and Wolfe, D.: *Lessons in Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory*, CRC Press, second edition (2019).

[2] Li, M., Yang, C. and Zhang, Z.: New Upper Bound for the Number of Games Born by Day 4, *Proceedings of the 28th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (JCDCG³ 2026)*, pp. 176–177 (2026).

[3] 小野 廣隆：4 日目までに生まれた短非不偏ゲームの総数のより良い上界，情報処理学会研究報告ゲーム情報学（GI），Vol. 2026-GI-59, No. 11, pp. 1–6 (2026).

[4] Ono, H.: Computational Artifact for a Lower Bound on Partizan Games Born by Day 4, GitHub Release, `https://github.com/ono-work/GLB-resources/releases/tag/gpw26-v1.0` (2026).

[5] Ono, H.: Computational Resources for Counting Partizan Games Born by Day 4, GitHub repository, `https://github.com/ono-work/GUB-resources` (2026). Revision `4f65049`.

[6] Suetsugu, K.: Improving Upper and Lower Bounds of the Number of Games Born by Day 4, *Games of No Chance 6*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Vol. 71, Cambridge University Press, pp. 447–460 (2025).

[7] Wolfe, D. and Fraser, W.: Counting the Number of Games, *Theoretical Computer Science*, Vol. 313, No. 3, pp. 527–532 (online), DOI: 10.1016/j.tcs.2003.05.001 (2004).

© 2026 Information Processing Society of Japan