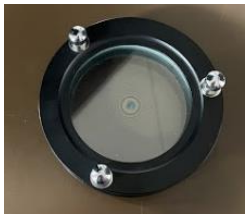
三平方の定理を用いたニュートンリング解析
～新たな解析法の開発～

要旨

スライドガラスを重ねて押さえるとできる円や縦縞模様と同じ原理の，ニュートンリングに興味を持った．ねじを締めながら観察するとリングが中心から湧き出るように見え，m＝１次付近に暗環が出現しないことがわかってきた．装置を新調して測定した結果，測定データは精度が比較的高いが，ねじの圧力の歪みでレンズの曲率半径の値にばらつきが生じ，何番目の暗線かが特定できないことがわかった．そこで，任意の暗環と暗環の本数に着目することで三平方の定理を利用した定数Ｃが求まることを発見し，「環間隔定数」と名付けた．このＣ値を求めることで，レンズが歪んだままでも曲率半径を導出できるようになった．さらに，暗環半径の任意の２点以上あれば曲率半径を導出でき，このＣ値の比較は曲率半径の精度指標になることもわかった．この装置はピクセル値計測によって曲率半径の精度向上ができ，安価で精度高い波長測定装置にもなると考えている．

動機,目的



スライドガラスを重ね、指で押さえると、円の縦縞の模様が見えることから、同じ原理であるニュートンリングに興味を持った。ニュートン環を装置の中心に出現させるために調節ねじで調整しながら観察していると、円形のリングが中心から次々と湧き出るように出現していることに気づいた。この現象に興味を持ち、その仕組みを調べてみることにした。また、顕微鏡測定やデジタルノギス測定等でもニュートンリング装置のレンズの“歪み”や“沈み”によって暗環半径rから曲率半径 R を算出できないことに気づいた。そのため、レンズの歪み等が生じても曲率半径 R を求めるための新たなシステムを開発することにした。

方法

装置はナリカ製NA-MN（曲率半径R=10）、光源はNa-D線を用い暗室下で行う。

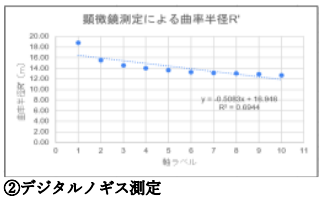
1. 真上から観察するため、ニュートンリングの中心が暗になるようにセットする。
2. デジタルノギスを用いて、ニュートンリング環の直径Dを測定する。
3. 同様に顕微鏡を用いて測定する。

結果

①顕微鏡測定

1　測定（顕微鏡）　直径D（単位：mm）

	①	②	③	④	⑤	⑥	直径D(平均)	半径 r (平均)	曲率半径
1	6.660	6.650	6.660	6.660	6.660	6.650	6.66	3.328	18.80
2	8.560	8.550	8.560	8.560	8.550	8.560	8.56	4.278	15.53
3	10.130	10.140	10.140	10.130	10.130	10.130	10.13	5.067	14.52
4	11.480	11.490	11.480	11.490	11.480	11.480	11.48	5.742	13.99
5	12.680	12.680	12.690	12.680	12.690	12.680	12.68	6.342	13.65
6	13.700	13.720	13.710	13.710	13.700	13.710	13.71	6.854	13.29
7	14.720	14.720	14.720	14.710	14.720	14.720	14.72	7.359	13.13
8	15.680	15.690	15.690	15.680	15.680	15.690	15.69	7.843	13.05
9	16.520	16.510	16.520	16.510	16.520	16.510	16.52	8.258	12.86
10	17.300	17.310	17.310	17.300	17.300	17.310	17.31	8.653	12.70
								曲率半径R'＝（平均）	**14.15**

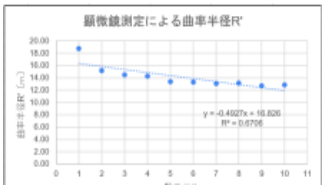


相関関係を示す決定係数
R^2＝0.6944
誤差が大きい！

②デジタルノギス測定

2　測定（デジタルノギス）　直径D(単位：mm)

	①	②	③	④	⑤	⑥	直径D(平均)	半径 r (平均)	曲率半径
1	6.7	6.6	6.7	6.6	6.7	6.6	6.65	3.33	18.76
2	8.4	8.4	8.5	8.6	8.4	8.5	8.47	4.23	15.21
3	10.1	10.2	10.1	10.1	10.1	10.2	10.13	5.07	14.52
4	11.7	11.5	11.6	11.7	11.5	11.6	11.60	5.80	14.27
5	12.4	12.6	12.6	12.7	12.5	12.5	12.55	6.28	13.36
6	13.6	13.5	13.9	13.8	13.7	13.7	13.70	6.85	13.27
7	14.5	14.7	14.8	14.8	14.7	14.6	14.68	7.34	13.07
8	15.7	15.8	15.8	15.8	15.7	15.7	15.75	7.88	13.15
9	16.4	16.4	16.6	16.5	16.2	16.4	16.42	8.21	12.70
10	17.1	17.4	17.5	17.5	17.4	17.5	17.40	8.70	12.84
								曲率半径R'＝（平均）	**14.12**



相関関係を示す決定係数
R^2＝0.6706
誤差が大きい！

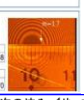
デジタルノギス,顕微鏡ともに R≒14m で一致し,標準誤差(SD)も小さい。しかし,
相対誤差 λ は, λ＝(14.13-10)/10=41%と非常に大きい。

検証

測定のミスではなく，何か根本的な要因があるのでは？

1．ニュートンリング装置における誤差の可能性
① （勘違いによると）
レンズを外すと空気中の埃やごみが挟まってしまう
→新たに購入した装置を使用し，外さずに使用している。
② （二木ら[1]の先行研究によると）
ねじ止めの圧力によって，レンズのわずかな歪みや，平板ガラスが沈んでしまうため，歪まないように固定すべき，と書かれている。
→レンズの歪み等が原因の可能性，大！

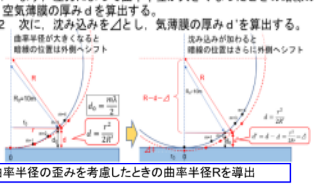
2．1次の暗線が出現していない可能性
沈み込みによって次数mがずれてしまっている？



次数m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
理論値	0.00	2.43	3.43	4.20	4.86	5.43	5.95	6.42	6.87	7.28	7.68
次数m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
測定値(マクロ平均)	0.00	3.33	4.23	5.07	5.80	6.28	6.85	7.34	7.88	8.21	8.70

Excel やGeoGebraを用いてレンズの歪み状況を可視化する

1　まず，圧力によって曲率半径が大きくなったときの暗線の空気薄膜の厚さｄを算出する。
2　次に，沈み込みを⊿とし，気薄膜の厚さｄ'を算出する。



圧力による，0次の沈み⊿や，曲率半径の歪みを考慮したときの曲率半径Rを導出

図より，
$R^2 = (R - d' - \Delta)^2 + r^2$
が成り立つ。

$2d'R + 2\Delta R - 2\Delta d' + d'^2 + \Delta^2 = r^2$
近似より，$d'^2 = 0, \Delta^2 = 0$とすると
$2R(d' + \Delta) = r^2 + 2\Delta d'$

$\therefore R = \dfrac{r^2 - 2\Delta d'}{2(d' + \Delta)}$

m次	入力 半径 r mm	曲率半径R' (m) ◎ R'=r²-2Δd' / 2(Δ+d') (m) Δを考慮して算出
		18.65
0		
1	3.325	43.74
2	4.233	21.43
3	5.067	18.13
4	5.800	16.88
5	6.275	15.24
6	6.850	14.84
7	7.342	14.39
8	7.875	14.38
9	8.208	13.69
10	8.700	13.80

m次	入力 半径 r mm	曲率半径R' (m) ◎ R'=r²-2Δd' / 2(Δ+d') (m) Δを考慮して算出
		12.00
0		
1		
2	3.325	11.87
3	4.233	11.73
4	5.067	12.10
5	5.800	12.42
6	6.275	11.87
7	6.850	12.00
8	7.342	11.96
9	7.875	12.19
10	8.208	11.79
11	8.700	12.04

各次数の半径rから導出した曲率半径：
R＝12.00m（平均）

考察

"歪み"や"沈み"が生じて曲率半径が変化しても，求める方法はないか？

$r = \sqrt{m\lambda R} \cdots ①$　より，
$m+n$番目の暗環半径r'は，$r' = \sqrt{(m+n)\lambda R} \cdots ②$

①，②より，$r'^2 - r^2 = n\lambda R$ と書けることから，
$r'^2 - r^2 = \left(\sqrt{n\lambda R}\right)^2 \quad \cdots ③$　と書ける。
ここで，$C_n = \sqrt{n\lambda R}$ とおく。C_nは，暗環の本数n及び，波長λ・曲率半径Rで定まる定数であることがわかる。また，C_nは，

$C_n = \sqrt{r'^2 - r^2} \quad \cdots ④$と書ける。このことから，最低，半径の２点がわかれば曲率半径R'が求められる。

$r'^2 - r^2 = \left(\sqrt{n\lambda R}\right)^2 \quad \cdots ③$　より、
$r'^2 = r^2 + (\sqrt{n\lambda R})^2$

→三平方の定理を利用できることを発見！

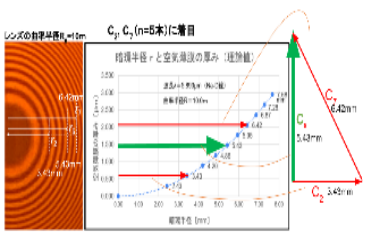
環間隔定数C　　曲率半径R＝10m，光源:Na-D線

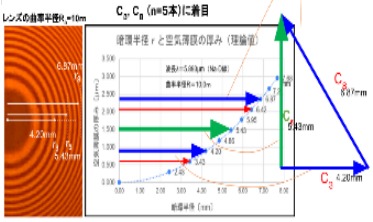
暗環 n本分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n値 (×10⁻³)	2.428	3.433	4.205	4.855	5.428	5.946	6.423	6.866	7.283	7.677

暗環の半径r（理論値）　　曲率半径R＝10m，光源:Na-D線

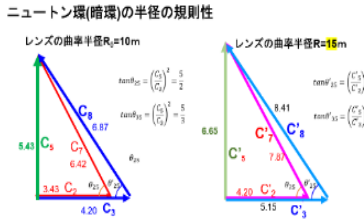
次数m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

この C_n を，環間隔定数と呼ぶ



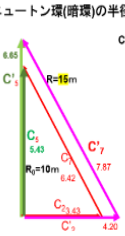


ニュートン環(暗環)の半径の規則性



新たな規則性①：$C_m{}^2 : C_n{}^2 : C_{m+n}{}^2 = m : n : (m+n)$

ニュートン環(暗環)の半径の規則性



C_3, C_5, C_7に着目

$\dfrac{C_7}{C_5} = \dfrac{6.65}{5.43} \fallingdotseq 1.22$倍

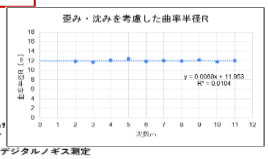
$\alpha = \left(\dfrac{C'_2}{C_2}\right)^2 = \left(\dfrac{C'_5}{C_5}\right)^2 = \left(\dfrac{C'_7}{C_2}\right)^2$

$= 1.5$倍

新たな規則性②：$R'_0 = R_0 \cdot \left(\dfrac{C'_n}{C_n}\right)^2$

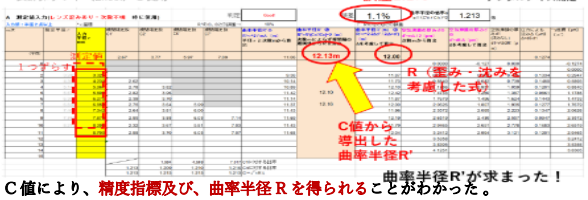
基準となる曲率半径（R=10m）の環間隔定数C_nと比較することで，曲率半径R'が求まる

レンズの歪みや沈みが生じるため，見える暗環は何番目か特定できないことが判明



未知の曲率半径の，C値（環間隔定数C）と曲率半径R'

表計算ソフト（Excel）を使用



C値により，精度指標及び，曲率半径 R を得られることがわかった。

イノベーションポイント

・レンズの“歪み”があっても，環間隔定数 C（Cn=$\sqrt{r'\ 2-r2}$）により,精度高く曲率半径が求まる。
・任意の２点測定するだけで曲率半径 R を求めるシステムを開発した。

展望

ニュートン環の画像から，最低，任意の２点の半径及び実測値１点だけで，曲率半径を算出できたことから，今後は，LEDライトなどの光源の波長を正確に求めていきたい。

画像のピクセル値による曲率半径R'

ピクセル値測定：
曲率半径R'＝12.14m

結論

・ニュートンリング装置は，圧力により，歪みや沈みが生じ，さらに，何番目の暗線かが特定できないことから，簡単には曲率半径を求められないことがわかった。

・Ｃ値を求めることで，歪み補正を入れなくても曲率半径を正確に求められることがわかった。

・Ｃ値の比較は，曲率半径の精度指標になることがわかった。

・ニュートン環の計測は，外側の暗線ほど細くなるため読み取り誤差は少ないが，歪みの割合が大きくなることがわかった。

参考文献

（1）二木治雄　矢ケ崎克馬　伊芸誠寛「ニュートンリングとレンズの歪み」物理教育/36 巻 3 号/ p. 246-249
（2）東京書籍　改訂　物理（教科書）
（3）geogebra説明https://ja.wikipedia.org/wiki/GeoGebra
（4）Image J説明　https://ja.wikipedia.org/wiki/ImageJ

謝辞

本研究にあたり、御助言を下さった梶尾先生にこの場をお借りして感謝申し上げます。