空気抵抗を考えた投射における最適角

2021年度課題研究Ⅰ　お茶の水女子大学附属高等学校2年　数理･情報科学　萩原明香里

1. はじめに

　空気抵抗が働かない状態での最適投射角（飛距離が最大になる角度）は、45度である。しかし、特殊な環境でない限りは空気抵抗力や揚力が働くため、最適投射角は変わってくる。そこで、本研究では、空気抵抗を考えた斜方投射の最適投射角を、Unityで作成した物理シミュレーションによって求める。速度によって変化するレイノルズ数から抗力係数を求めて、より正確な斜方投射の軌道のシミュレーションを試みた。そのシミュレーションで、試行を繰り返して飛距離のデータを取り、初速と最適投射角の関係を予想する。

2. 研究手法

　球体の斜方投射をした時に、実行してからの時間と球体の座標を出力するプログラムを作成した。参考文献[1]の斜方投射のプログラムを参考に、以下のような計算で求めた空気抵抗力が加わるように編集して使用した。

▶空気抵抗力の計算

m：質量(kg)
g：重力加速度(m/s^2)
Fw：重力(N)
Fd：抗力(N)
v：球の速度
d：球の直径[m]
ρ：流体密度(空気)(kg/m^3)
μ：粘性係数
Kv：空気動粘度
A：前面投影面積[m^2]
Cd：抗力係数
Re：レイノルズ数

ボールにかかる力Fは

$$F = Fw + Fd$$

とする。

m = 0,1　g = 9.81で実験した。
重力Fwは

$$Fw = mg$$

で求まるが、Unityの物理演算Rigidbodyで重力は適用される。
よって斜方投射された球にFdが加わるようにプログラムする。
レイノルズ数(慣性力と粘性力の比)を求める。

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

標準大気圧($0.1013hPa$)で20°Cとする。

$\rho = 1.205$

$\mu = 1.822 \times 10^{-5}$

$Kv = 1.512 \times 10^{-5}$

よって

$$Re = 1.205 \times v \times 0.18 \div 1.822 \times 10^{-5}$$

抗力係数Cdを求める。
レイノルズ数から抗力係数を近似する式は各種あるが、
本実験ではMorrisonの式を使用した。
Morrisonの式

$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{2.6(Re/5.0)}{1+(Re/5.0)^{1.52}} + \frac{0.411(Re/(2.63\times10^5))^{-7.94}}{1+(Re/(2.63\times10^5))^{-8.0}} + \frac{0.25(Re/10^6)}{1+(Re/10^6)}$$

また、球の投影面積Aは

$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$ であることから、

$$A = \frac{0.18^2 \times 3.14}{4} = 0.25445$$

最後に、抗力Fdは

$$Fd = \frac{1}{2}C_d \rho A v^2$$

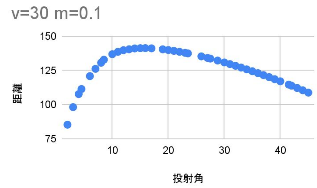
であるから、これらに値を入れる。
レイノルズ数は球の速度によって変化するため、抗力係数及び抗力は変化していく。

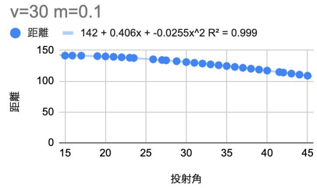
　地面に着地した時の進んだ距離(y座標)を取得する→角度を変えながら繰り返し実行し、得た値を散布図にして、googleスプレッドシートの機能「トレンドライン」で近似式を求めて最適投射角を調べる。初速を変えて同様の実験をし、それぞれ最適投射角を求め、初速と最適投射角の関係を調べる。

参考文献
[1] 西住工房『[Unity]ボールを自由落下させて地面で跳ね返るシミュレーション
https://algorithm.joho.info/unity/ball-free-fall-rebound/最終閲覧日6月20日
[2] 株式会社キャットテックラボ 球の抗力係数の計算 https://cattech-lab.com/science-tools/sphere-cd/
最終閲覧日1月30日
[3] UE1030400空気抵抗を考慮した運動方程式の検討 3BScientific
https://www.3bs.jp/documents-download/UE1030400_calc_new.pdf最終閲覧日1月20日
[4]Unityユーザーマニュアルhttps://docs.unity3d.com/ja/2018.4/Manual/index.html最終閲覧日1月31日

3.予備実験

最適投射角をθとする。

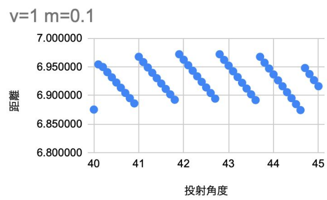


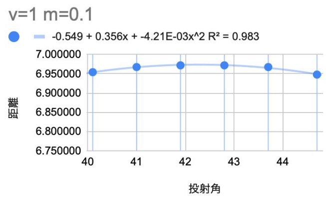


　初速を固定し、投射角を変えていったときの飛距離の変化を知るために、v=30で2°~45°の実験を行ったところ、θと思われる値(今回は15°あたり)より投射角を小さくしていくとと急激に飛距離が落ちていくことがわかった。この初速と飛距離のグラフの近似式を表示したところ、単純な式で表すことが不可能であることがわかった。そこで、θに差し掛かるあたりまでのグラフを作り近似式を表示したところ、高い決定定数において2次の多項式で表せることがわかった。よって、2次の近似式を平方完成して二次関数の頂点を求めることによって、θを求めることにした。

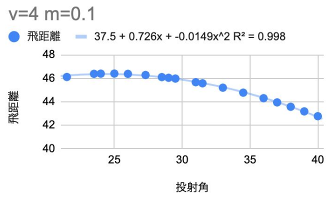
4.本実験の結果

　v=1のとき、飛距離が下の左図のようにジグザグとしてしまったため、頂点だけをとってグラフにした。



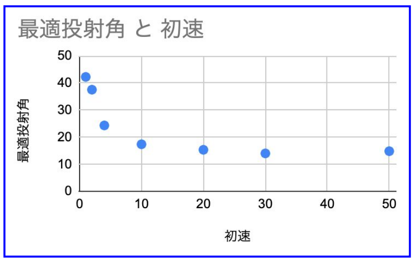


　v=2のときも振り幅は小さいものの同様の状態になったため、同じように頂点だけをとってグラフにした。
　v=4以上を調べたところ、値がほとんど上下しなくなったため、そのまま近似式を表示した。(v=1,2のときに値がジグザグしたのは、Unityの端数処理の影響を小さい初速だと受けやすいのだと推察する。)



　v=1,2,4,10,20,30,50を調べ、2次関数の近似式を平方完成してθを求めて、縦軸をθ、横軸を初速としてグラフを作ると下のようなグラフのようになった。

初速	最適投射角θ
1	42.2803
2	37.5587
4	24.3624
10	17.3986
20	15.3563
30	14.0288
50	14.8485



5.考察･課題

　投射角と初速の関係をグラフにしたところ、v＝0~10にかけて最適投射角の値が大きく下がり、そのあとは15°あたりで緩やかに安定する、というような規則性が見られた。
このことから、
　・最適投射角は初速によって変わる
　・初速を大きくすると、最適投射角が小さくなる
　・初速を大きくすると、最適投射角の減少の仕方が小さくなり、安定していくという法則があると予想する。しかし、今回実験した初速の値が極めて少ないことや、シミュレーションにより求めたことで実験していない値(極めて大きい値など)も同様の規則性を持つことが証明できないこと、今回の実験では最適投射角に到達するまでは二次関数で変化していくとして最適投射角を求めたため不確実であることなど、課題が残る。より正確な法則を知る、または証明するためには、データからだけではなく理論からのアプローチが必要であると考える。