F-028

部分的選好下における学校選択メカニズム

School Choice Mechanism with Partial Preferences

和田 凌司* Ryoji Wada　八尋 健太郎* Kentaro Yahiro　東藤 大樹* Taiki Todo　横尾 真* Makoto Yokoo

1 序論

学生と学校，研修医と病院のような 2 種類のエージェント間のお互いの好み (選好) に基づく適切な割当を求めるマッチング問題は，経済学や人工知能，マルチエージェントシステムの分野において盛んに研究されている [1, 2, 3]．マッチング問題の代表的な問題の一つとして，学校選択問題がある．学校選択問題は，複数の学生を学校に割り当てる問題であり，学校の割当人数に対して，上限や下限などの制約が課されることが一般的である [4]．本論文では，その中でも個々の学校の割当人数に上限値が存在する，個別上限制約を扱う．

学校選択問題に関する既存研究の多くは，各エージェントの持つ選好が厳密に順序付けられており，学生や学校が自らの選好を完全に把握している問題を前提としている．しかしながら，学生や学校が数多く存在する現実的な仮定の下では，学生がすべての学校の情報を正確に得ることは困難であり，同様に学校がすべての学生の差異を明確にすることも容易ではない．そこで本論文では，各エージェントの選好の一部が明確に順序付けられていない，**部分的な選好**の下での学校選択問題を考察する．

各エージェントが潜在的に持つ選好の厳密な順序付けを解明する方法として，様々な手法が考察されている．例えば，学生に質問を行うことにより，その学生が厳密に順序付けを行っていない学校の順序付けを明らかにするクエリが存在する [5]．本論文ではそのような手法の中でも，学生が学校に行う**インタビュー**により，各エージェントが厳密な順序付けを行うモデルを扱う．個々の学生や学校に対して行うクエリに対して，インタビューでは学生と学校が相互に情報を得る．学生は順序付けが明確でない複数の学校にインタビューを行うことにより，それらの学校間の厳密な順序付けを行うことができる．学校側も同様に，複数の学生からインタビューを受けることにより，それらの学生間の順序付けが可能となる．すなわち，インタビューによって，双方のエージェントが潜在的に持つ厳密な選好を明らかにすることができる．

インタビューのような情報を収集する行為には，時間的・金銭的なコストが生じると仮定するのが一般的である．そこで，必要最小限のインタビューを用いて，各エージェントが潜在的に持つ厳密な順序付けを解明しつつ，望ましい性質を満たす割当を求めることが望まれる．

各エージェントの選好がすべて厳密に順序付けられている場合，Gale-Shapley アルゴリズム (GS) [6] により，学生最適性を満たす割当を求めることができる．学生最適性を満たす割当は，安定性を満たす割当の中で，すべての学生が最も好む割当である．部分的な選好の下での一対一マッチング問題においては，必要最小限のインタビューを行うことで，GS と等価な割当，すなわち学生最適性を満たす割当を求めるメカニズムが存在する [7]．しかしながら，このメカニズムはすべての学校に対して，共通な部分的選好を仮定している．そこで本論文では，より一般的な仮定の下における多対一マッチング問題を考察する．

本論文の貢献は主に 3 つである．1 つ目は，任意の部分的な選好の下における学校選択問題に対して，学生最適な割当を出力する **Lazy Gale-Shapley アルゴリズム (LGS)** の提案である．LGS においては，既存のメカニズムが動作するために要求した仮定を必要とせず，多対一マッチング問題を扱うことができる．その上で，LGS が出力する割当が満たす性質は，既存研究と等価であることを証明した．2 つ目は，部分的な選好に対する既存の仮定を緩和した，整合性の提案である．学校側の部分的な選好に整合性を仮定することにより，LGS は必要最低限のインタビューのみを行う．また，整合性を満たす学校側の部分選好においては，各学校の持つ選好がそれぞれ異なる場合も存在する．これにより，既存研究を一般化したモデルにおいて，LGS が既存研究と同等の性質を満たすことを明らかにした．3 つ目は，LGS が必要とするインタビュー回数の定量的な評価である．部分的な選好の下で既存の GS が動作するために必要なインタビュー回数との比較により，LGS が削減できるインタビューの割合を示した．また，実験結果より，各エージェントの持つ選好がより詳細であるほど，より少ないインタビューの回数で割当を出力できることが明らかとなった．

2 モデル

部分的選好下における学校選択問題は，(S, C, p_S, p_C, q_C) の組で定義される．$S = \{s_1, \dots, s_n\}$ は学生の集合である．$C = \{c_1, \dots, c_m\}$ は学校の集合である．$X = S \times C$ は契約の集合であり，契約 $(s, c) \in X$ は，学生 s が学校 c に割り当てられていることを意味する．$X' \subseteq X$ において，$X'_s = \{c \in C \mid (s, c) \in X'\}$ は学生 s が割り当てられている学校の集合を，$X'_c = \{s \in S \mid (s, c) \in X'\}$ は学校 c に割り当てられている学生の集合を表す．$\succ_S = (\succ_{s_1}, \dots, \succ_{s_n})$ は，学生側が持つ潜在選好の組である．学生 s が持つ潜在選好 $\succ_s$ は，$\emptyset$ を含むすべての学校 $C \cup \{\emptyset\}$ を厳密に順序付ける．学

* 九州大学大学院システム情報科学府 Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

校 c が s にとって**受け入れ可能である**とは，$c \succ_s \emptyset$ が成り立つことである．$\succ_C = (\succ_{c_1}, \ldots, \succ_{c_m})$ は，学校側が持つ潜在選好の組である．学校 c が持つ潜在選好 $\succ_c$ は，$\emptyset$ を含むすべての学生 $S \cup \{\emptyset\}$ を厳密に順序付ける．学校 s が c にとって**受け入れ可能である**とは，$s \succ_c \emptyset$ が成り立つことである．$p_S = (p_{s_1}, \ldots, p_{s_n})$ は，学生側が持つ部分選好の組である．学生 s が持つ部分選好 p_s は，s に関するすべての同格クラスを厳密に順序付ける．同格クラス p_s^i は $C \cup \{\emptyset\}$ の部分集合であり，s が潜在選好を把握できない初期の段階で厳密に順序付けできない学校との契約の集合のうち，s が i 番目に好むものである．同格クラスの順序付けにおいて，$i < j$ ならば，任意の学校 $c \in p_s^i$ と $c' \in p_s^j$ に対して，$c \succ_s c'$ が成り立つ．また，$\bigcup_{i=1}^{|p_s|} p_s^i = C \cup \{\emptyset\}$ かつ，$i \neq j$ に対して $p_s^i \cap p_s^j = \emptyset$ である．$p_C = (p_{c_1}, \ldots, p_{c_m})$ は，学校側が持つ部分選好の組である．学生 c が持つ部分選好 p_c は，c に関するすべての同格クラスを厳密に順序付ける．同格クラス p_c^i は $S \cup \{\emptyset\}$ の部分集合であり，c が潜在選好を把握できない初期の段階で厳密に順序付けできない学生との契約の集合のうち，c が i 番目に好むものである．同格クラスの順序付けにおいて，$i < j$ ならば，任意の学生 $s \in p_c^i$ と $s' \in p_c^j$ に対して，$s \succ_c s'$ が成り立つ．また，$\bigcup_{i=1}^{|p_c|} p_c^i = S \cup \{\emptyset\}$ かつ，$i \neq j$ に対して $p_c^i \cap p_c^j = \emptyset$ である．$q_C = (q_{c_1}, \ldots, q_{c_m})$ は，学校の定員のベクトルである．

各学生・学校が互いの詳細な情報を持たない初期の段階においては，各エージェントは自分の潜在選好を把握していないと考える．したがって，部分選好のみが入力として与えられ，その部分選好に矛盾しない厳密な順序付けのいずれか 1 つが真の潜在選好となる．

定義 1 (実現可能性)**.** X' が **学校側実現可能である**とは，任意の学校 $c \in C$ について $|X'_c| \le q_c$ が成り立つことである．X' が **学生側実現可能である**とは，任意の学生 $s \in S$ について，s の受け入れ可能な学校 c に対して $X'_s = \{c\}$ を満たす，あるいは，$X'_s = \emptyset$ を満たすことである．X' が**実現可能である**とは，X' が学校側実現可能かつ学生側実現可能であることである．また，実現可能な契約の集合を**マッチング**という．

マッチングに望まれる性質として，以下のいくつかの性質を定義する．

定義 2 (非浪費性)**.** マッチング X' において，学生 s が学校 c に**空きシートを要求する**とは，$(s,c) \in X \backslash X', (s,c') \in X'$ に対して $c \succ_s c'$ を満たし，かつ，$(X' \backslash \{(s,c')\}) \cup \{(s,c)\}$ が実現可能であることである．マッチング X' が**非浪費性を満たす**とは，空きシートを要求する学生が存在しないことである．

定義 3 (公平性)**.** マッチング X' における $(s,c) \in X'$ に対して，学生 s が他の学生 $s'(\neq s)$ に**妥当な不満を持つ**とは，$(s,c') \in X \backslash X', (s',c') \in X'$ について，$c' \succ_s c$ かつ $s \succ_{c'} s'$ が成り立つことである．マッチング X' が**公平性を満たす**とは，妥当な不満を持つ学生が存在しないことである．

定義 4 (安定性)**.** マッチング X' が**安定性を満たす**とは，X' が非浪費性を満たし，かつ，公平性を満たすことである．

定義 5 (学生最適性)**.** マッチング X' が**学生最適である**とは，X' が安定性を満たし，かつ，他の任意の安定性を満たすマッチングと比較して，どの学生もより低い選好順位の学校に割り当てられていないことである．任意の入力に対して学生最適なマッチングを出力するとき，そのメカニズムは学生最適であるという．

学生最適なマッチングは，安定性を満たすマッチングの中ですべての学生が最も好むマッチングである．各エージェントが自分の潜在選好を把握している場合，学生最適なマッチングは常に一意に求まる [6]．

部分選好から学生最適なマッチングを求めるために，学生が学校に**インタビュー**を行うことで追加の情報を得る必要がある．学生 s が学校 c に対してインタビューを行うことを $(s:c)$ と表す．インタビュー $(s:c)$ を行うことにより，学生 s は既にインタビューを行った学校と c を厳密に順序付けることができる．同様に，学校 c は既にインタビューを行った学生と s を厳密に順序付けることができる．

インタビューを行うことで明らかになった順序付けを以下のように定義する．

定義 6 (インタビュー状態)**.** 学生 s のインタビュー状態 $\mathcal{I}_s$ とは，s がインタビューを行った学校間の，s の潜在選好に基づく厳密な順序付けである．同様に，学校 c のインタビュー状態 $\mathcal{I}_c$ とは，c とインタビューを行った学生間の，c の潜在選好に基づく厳密な順序付けである．また，$\mathcal{I}_S = (\mathcal{I}_{s_1}, \cdots, \mathcal{I}_{s_n})$，$\mathcal{I}_C = (\mathcal{I}_{c_1}, \cdots, \mathcal{I}_{c_m})$ とする．

任意の学生 $s \in S$ と任意の学校 $c, c' \in C$ に対して，p_s において s が c を c' より厳密に高く順序付けているとき，$\mathcal{I}_s$ においても c を c' より厳密に高く順序付けているならば，インタビュー状態 $\mathcal{I}_S$ が部分選好 p_S を**詳細化する**といい，$\mathcal{I}_S \lhd p_S$ と表す．同様に，任意の学校 c と任意の学生 $s, s' \in S$ に対して上記が成り立つならば，インタビュー状態 $\mathcal{I}_C$ が部分選好 p_C を**詳細化する**といい，$\mathcal{I}_C \lhd p_C$ と表す．また，潜在選好 $\succ_S$ や $\succ_C$ が，部分選好 p_S, p_C を詳細化するとき，それぞれ $\succ_S \lhd p_S, \succ_C \lhd p_C$ と表す．

定義 7 (ポリシー)**.** インタビュー状態 $\mathcal{I}_S \lhd p_S, \mathcal{I}_C \lhd p_C$ からインタビューの実行，あるいはマッチングの出力を行う写像を，**ポリシー**という．

ポリシーは，$I = (S, C, p_S, p_C, q_C)$ を入力として一連のインタビューを行った後，マッチングを出力する．ここでは簡単のために，入力 I は所与のものであるとしている．ポリシーは直前までのインタビューの結果に基づいて，次に行うインタビューを決定する．ポリシーに望まれる性質として，以下を定義する．

定義 8 (健全性)**.** あるポリシーが**健全である**とは，そのポリ

シーが任意の潜在選好 $\succ_S \lhd p_S, \succ_C \lhd p_C$ に対して，学生最適なマッチングを出力することである．

健全なポリシーにおいて，学生はインタビューを行っていない学校に割り当てられうる．しかしながら，現実的な状況では，最終的に割り当てられる学生と学校の間では，必ずインタビューが行われていることが望ましい．よって，以下の性質を導入する．

定義 9 (慎重性)**.** あるポリシーが**慎重である**とは，そのポリシーが健全であり，かつ，任意の契約 $(s, c) \in X'$ に対し，$s \in \mathcal{I}_c, c \in \mathcal{I}_s$* となる場合に限り，$\mathcal{I}_S, \mathcal{I}_C$ から X' を出力することである．

すなわち，慎重なポリシーにおいて，学生はインタビューを行った学校のみに割り当てられる．

健全なポリシーを構成すること自体は困難ではない．例えば，すべての学生がすべての学校にインタビューを行うポリシーにより，すべてのエージェントの潜在選好が明らかになるため，既存のメカニズムを用いることが可能である．しかしながら，このポリシーは必ずしも必要でないインタビューを行うことがある．また，現実的な仮定において，インタビューにはコストがかかると考えるのが自然である．したがって，インタビューを行う回数を必要最小限にする健全なポリシーを求めたい．そこで，ポリシーに以下の性質を定義する．ここで，潜在選好が $\succ_S \lhd p_S, \succ_C \lhd p_C$ である場合に，ポリシー f が実行するインタビューの回数を，$\theta(f, \succ_S, \succ_C, p_S, p_C)$ と表す．

定義 10 (インタビュー数の最小性)**.** ポリシー f が健全なポリシー g を**弱支配する**とは，任意の潜在選好 $\succ_S \lhd p_S, \succ_C \lhd p_C$ に対し，$\theta(f, \succ_S, \succ_C, p_S, p_C) \le \theta(g, \succ_S, \succ_C, p_S, p_C)$ が成り立つことである．ポリシー f が健全であり，かつ，他の任意の健全なポリシー g を弱支配するとき，ポリシー f は**インタビュー数が最小である**という．

本論文ではインタビュー数を最小にするポリシーの発見を目的として，第 3 章で新たなメカニズムを提案する．

3 Lazy Gale-Shapley アルゴリズム

Gale と Shapley による既存の Gale-Shapley アルゴリズム (GS) [6] は，すべてのエージェントの厳密に順序付けられた選好の下で，学生最適性を満たす．本章では GS に基づき，部分的選好下における多対一マッチング問題において，学生最適性を満たす Lazy Deferred Acceptance アルゴリズム (LGS) を提案する．

部分的選好の下で GS の動作を実現するために，学生が学校に逐次的にインタビューを行うことにより，潜在選好を明らかにする．学生はある定められた順序付け O に基づいて順番にインタビューを行った後，GS に従って学校に申し込む．

* i がある順序付け $\mathcal{P}$ の要素の一つであるとき，$i \in \mathcal{P}$ と表すことにする．

この順序付け O は，部分選好と同様に学生の部分集合に対する順序付けであり，k 番目に順序付けられる学生の部分集合を O^k とするとき，$O = (O^1, \cdots, O^k, \cdots, O^{|O|})$ である．ただし，$\bigcup_{k=1}^{|O|} O^k = S$ であり，$O^k \in O$ は $\emptyset$ を含まない．また，アルゴリズムを実行する前の処理として，各学校 c の部分選好内のある同格クラス $p_c^t \in \{p_c^1, \ldots, p_c^{|p_c|-1}\}$ が $\emptyset$ を含む場合，$p_c^{t+1}, \ldots, p_c^{|p_c|}$ 内の学生 s は c にとって受け入れ可能でないため，そのような各学生 s について，c を p_s 内の同格クラスから削除する．

以上の定義を以て，LGS を定義する．

メカニズム 1 (Lazy Gale-Shapley アルゴリズム (LGS))**.**

初期値 $X' = \emptyset, l_{s \in S} = 0, \mathcal{I}'_{s \in S} = \emptyset, \mathcal{I}'_{c \in C} = \emptyset, k = 1$

ステージ k O^k 内の各学生 $s \in O^k$ に対して，以下を行う†．

ステップ 1 $\mathcal{I}'_s = \emptyset$ である間，以下を繰り返す．

1. $l_s \leftarrow l_s + 1$ とする．
2. $p_s^{l_s}$ 内のすべての学校 c について，インタビュー $(s : c)$ を行う．$\mathcal{I}'_s$ に c を，$\mathcal{I}'_c$ に s を加え，順序付ける．
3. $\mathcal{I}'_c$ に $\emptyset$ が含まれておらず，かつ p_c において s と $\emptyset$ が同じ同格クラスに含まれる場合，$\mathcal{I}'_c$ に $\emptyset$ を加え，順序付ける．
4. $\mathcal{I}'_c$ において $\emptyset$ が s より厳密に上位である場合，$\mathcal{I}'_s$ から c を削除する．
5. $\emptyset \in p_s^{l_s}$ である場合，$\mathcal{I}'_s$ に $\emptyset$ を加え，順序付ける．

ステップ 2 $\mathcal{I}'_s$ において $\emptyset$ が最も上位である場合，s をどの学校にも割り当てずに s の割当を終了する．そうでなければ，s は $\mathcal{I}'_s$ において最も上位の学校 c_{top} に申し込み，$X' \leftarrow X' \cup \{(s, c_{top})\}$ とする．

ステップ 3 $q_{c_{top}} < |X'_{c_{top}}|$ である場合，c_{top} は $X'_{c_{top}}$ の中で $\mathcal{I}'_{c_{top}}$ において最も順位の低い学生 s_w を拒否する．すなわち，$X' \leftarrow X' \backslash \{(s_w, c_{top})\}$ とする．

ステップ 4 $|X'_{c_{top}}| = q_{c_{top}}$ である場合，$X'_{c_{top}}$ の中で $\mathcal{I}'_{c_{top}}$ において最も順位の低い学生を s_w とする．さらに，$p_{c_{top}}$ あるいは $\mathcal{I}'_{c_{top}}$ の少なくとも一方において s_w より厳密に下位である各学生 s'_w に対して，$p_{s'_w}$ 内の同格クラスと $\mathcal{I}'_{s'_w}$ から c_{top} を削除する．

ステップ 3 において c_{top} から拒否された学生 s' が存在する場合，$s \leftarrow s'$ として再度上記のステップを繰り返す．すべての学生の割当が決定した場合，X' を出力して動作を終了する．$O^1, \cdots, O^k$ に含まれるすべての学生に割当が決定した場合，ステージ $k + 1$ を行う．

定理 1. LGS は学生最適であり多項式時間で動作する，

証明は紙幅の都合上割愛するが，LGS の出力が GS の出力と等価になることを利用して証明を行う．

† O^k 内の学生の順序は，アルゴリズムの出力に影響しない．

4 整合性を満たす部分選好

既存研究 [7] では，任意の部分選好の下ではインタビュー数を最小にするポリシーは必ずしも存在しないが，学校側の部分選好がすべて等しいという仮定をおくことにより，一対一マッチングにおいて，提案メカニズムがインタビュー数を最小にするポリシーを実行することを示した．本章では，より一般的な仮定である**整合性**を学校側の部分選好に仮定することにより，LGS がインタビュー数が最小であるポリシーを実行することを示す．

学校 $c \in C$ の $\emptyset \in p_c^i$ となる i に対して，$S_c = \bigcup_{j=1}^{i} p_c^j \backslash \{\emptyset\}$ とする．また，$q_c < |S_c|$ を満たす学校の集合を C_+ とする．$p_{c \in C_+}$ において， q_c 番目に順序付けられた学生が存在する同格クラス p_c^h に対し，$\hat{S}_c = \{s \in S \mid s \in p_c^i, 1 \leq i \leq h\}$ とする．

有向グラフ G は，頂点集合 V と頂点の順序対の集合 $E \subset \{(i,j) \mid i,j \in V\}$ の組 (V,E) である．順序対 (i,j) を，i から j への有向エッジと呼ぶ．また，頂点 i に対して，$\deg_G^-(i) = |\{(j,i) \in E \mid i,j \in V, i \neq j\}|$ を i の入次数という．

定義 11 (部分選好グラフ)**.** 学校 $c \in C_+$ に対して，頂点集合 $V = S$ であり，かつ，有向エッジの集合 E_c が， p_c において $s \in S_c$ を $s' \in S_c \backslash \hat{S}_c$ より厳密に高く順序付けるような s から s' への有向エッジ (s,s') をすべて含む有向グラフ $G_c = (V,E_c)$ を，**(学校 c の) 部分選好グラフ**という．すべての $c \in C_+$ について G_c が部分選好グラフであるとき，$V = S$ かつ $E_C = \bigcup_{c \in C_+} E_c$ とした有向グラフ $G_C = (V,E_C)$ を考える．G_C が有向非巡回グラフであるとき，G_C を**部分選好グラフ**という．

すなわち，部分選好グラフは各学生を頂点とし，その中でも S_c に含まれる学生について，部分選好における上位の学生から厳密に下位の学生への有向エッジを持つ．したがって，学校 c の部分選好グラフ G_c は，S_c に限定した c の部分選好 p_c を表す．

部分選好グラフを用いて，以下の性質を定義する．

定義 12 (整合性)**.** 学校 $c \in C_+$ に対して， G_c の頂点 S_c に関する誘導部分グラフ $G_c[S_c]$ と，G_C の頂点 S_c に関する誘導部分グラフ $G_C[S_c]$ を考える．$G_C[S_c]$ において，$s,s' \in \hat{S}_c$ を満たす学生間の有向エッジ (s,s') をすべて除いた有向非巡回グラフを $\hat{G}_C[S_c]$ とする．学校側の部分選好 p_C が**整合性を満たす**とは，任意の学校 $c \in C_+$ について，$G_c[S_c]$ と $\hat{G}_C[S_c]$ が一致することである．ただし，有向グラフ $G = (V,E)$ の頂点の任意の部分集合 $V' \subset V$ に関する誘導部分グラフ $G[V']$ は，頂点集合を V' とし，有向エッジの集合を $E[V'] = \{(i,j) \in E \mid i,j \in V'\}$ とする有向グラフである．

すなわち，学校側の部分選好が整合性を満たすとき，各学校 c の部分選好グラフ G_c が表す，S_c に限定した c の部分選好と，S_c に限定した G_C が表す部分選好がそれぞれ一致する．

整合性を満たす学校側の部分選好 p_C における部分選好グラフ G_C を考える．入次数が 0 である頂点の集合を $\mathcal{O}^1 = \{s \in S \mid \deg_{G_C}^-(s) = 0\}$ とする． G_C から頂点 $s \in \mathcal{O}^1$ を除いた誘導部分グラフを G_C^1 とし，$\mathcal{O}^2 = \{s \in S \mid \deg_{G_C^1}^-(s) = 0\}$ とする．同様の操作を頂点がなくなるまで繰り返し， $\mathcal{O}^3, \mathcal{O}^4, \cdots$ としていく．以上により得られる順序付け $\mathcal{O} = (\mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2, \cdots)$ を**整合的順序** $\mathcal{O}$ という．学校側の部分選好が整合性を満たす場合，整合的順序 $\mathcal{O}$ が一意に決定する．

学校側の部分選好が整合性を満たす仮定の下で，LGS のインタビュー数を議論する．LGS において，整合的順序 $\mathcal{O}$ がインタビュー数に与える影響を，以下の補題により示す．このとき，LGS の入力において，$O = \mathcal{O}$ である．

補題 1. 整合的順序 O に従って LGS を行う場合，$O^{k+l} (l > 0)$ 内の任意の学生の割当によって，O^k 内の学生が現在の割当から拒否されることはない．

証明. O において，$s \in O^k, s' \in O^{k+l} (l > 0)$ となる任意の学生 s,s' を考える．このとき，整合的順序の定義より，$s' \in S_c \backslash \hat{S}_c$ となる s' に対して，p_c において $s \succ s'$ とする学校 c が，少なくとも 1 校以上存在する．

上記以外の学校 c' を考える．

- $s \notin S_{c'}$ または $s' \notin S_{c'}$ を満たす場合，部分選好グラフの誘導部分グラフ $G_{c'}[S_{c'}], G_C[S_{c'}]$ において，s,s' 間の有向エッジを持たないため，$p_{c'}$ における s,s' の順序は O に影響しない．
- $s,s' \in \hat{S}_{c'}$ を満たす場合，c' は申し込んできた s,s' の両者を必ず受け入れるため，$p_{c'}$ における s,s' の順序は O に影響しない．
- $s,s' \in S_{c'}$ かつ，$s \notin \hat{S}_{c'}$ または $s' \notin \hat{S}_{c'}$ を満たす場合，c' が $p_{c'}$ において $s' \succ s$ とするとき，G_C において閉路が存在するため，整合性の定義に反する．また，c' が $s,s' \in p_{c'}^d$ とする場合，部分選好グラフ $G_{c'}$ は s,s' 間の有向エッジを持たないが，G_C は (s,s') を持つため，整合性の定義に反する．

したがって，s,s' の順序が O に影響を与えるすべての学校 c' は，$p_{c'}$ において $s \succ s'$ を満たす．以上より，O において O^k 内のすべての学生がインタビューを行い，割当が仮に決定したとき，任意の $s' \in O^{k+l}$ の割当によって，O^k 内の学生が現在の割当先から拒否されることはない．

□

補題 1 により，LGS のインタビュー数に関する以下の定義が示される．

定理 2. 整合性を満たす学校側の部分選好の下で，LGS は慎重かつインタビュー数が最小であるポリシーを実行する．

証明. 学校 c は，p_c において $\emptyset$ より厳密に優先順位の低い学生 s を受け入れないため，S_c に含まれる学生についてのみ，インタビューを行う順序を考える．また，$|S_c| \leq q_c$ を満たす

学校 c は，S_c 内のすべての学生を受け入れられるため，インタビューを行う学生の順序を考慮しない．一方，$q_c < |S_c|$ を満たす各学校 c について考える．p_C が整合性を満たすことから，インタビューを行う学生の順序 O は整合的順序である．したがって，補題 1 より，p_c^l 内の学生の割当によって p_c^l より高い同格クラス内の学生が拒否されることはない．また，p_c^l 内の学生がインタビューを行うとき，p_c^l より高い同格クラス内のすべての学生は割当が仮に決定している．さらに LGS において，仮の割当が決定した学生は，現在割り当てられている学校から拒否されない限り他の学校に申し込むことはないため，現在の割当が最終的なマッチングとなる．定理 1 より，そのマッチングは学生最適である．したがって，$q_c < |S_c|$ を満たす各学校 c において，p_c^l より上位の同格クラス内のすべての学生が，学生最適なマッチングにおける割当先に割り当てられたとき，p_c^l 内の学生のみがインタビューを行う．

学生 s にとって学校 c が達成可能であるとは，s が c にとって受け入れ可能であり，$|X_c'| < q_c$，あるいは，$|X_c'| = q_c$ かつ，p_c において X_c' 内の最も好まない学生より厳密に下位でないことである．各学生 $s \in S$ の p_s において，最終的なマッチング X' における s の割当先 c より厳密に下位でない，s にとって達成可能な学校の集合を Ω_s とする．

s が $c' \in \Omega_s$ にインタビューを行っていないと仮定する．c' は c 以上の同格クラスに含まれるため，$c' \succ_s' c$ となる $\succ_s'$ が存在しうる．これは LGS により出力されたマッチングが学生最適であることに矛盾するため，s は Ω_s 内のすべての学校とインタビューを行う．

次に，s にとって達成可能でない学校 $\dot{c}$ を考える．$\dot{c}$ にとって s が受け入れ可能でない場合，p_s から $\dot{c}$ を削除する．また，s が $w_{\dot{c}}$ より厳密に下位である場合，O に基づいて s がインタビューを行う時点で $w_{\dot{c}}$ は既にインタビューを行い，$\dot{c}$ に割り当てられている．また，$w_{\dot{c}} \in O^j$ は $\dot{c}$ が X' 内で最も好まない学生であるため，LGS のステージ j において，$\dot{c}$ の定員は満たされる．このとき，ステージ j 内のステップ 4 の操作により，p_s 内の同格クラスから $\dot{c}$ が削除される．したがって，s がインタビューを行うとき，$\dot{c}$ は p_s 内のどの同格クラスにも存在しないため，s は達成可能でない学校 $\dot{c}$ にインタビューを行わない．

また，p_s において c より厳密に低く順序付けられた学校 $\ddot{c}$ を考える．s が c にインタビューを行うとき，インタビュー $(s:\ddot{c})$ は行われない．また，s の最終的な割当は c となるため，インタビュー $(s:\ddot{c})$ が行われることはない．したがって，s は Ω_s 以外の学校とはインタビューを行わない．

以上より，LGS において，s は Ω_s 内のすべての学校とインタビューを行い，かつ，Ω_s 以外の学校とはインタビューを行わない．また，学生はインタビューを行った学校にのみ申し込むため，LGS は慎重かつインタビュー数が最小であるポリシーを実行する． □

5 実験

本章では，計算機実験により LGS が必要とするインタビュー数を評価する．学生数 $n = 400$，学校数 $m = 20$ とし，各学校の定員は $q_c = 20$ とする．また，各学生は全学校を受け入れ可能であり，同様に各学校は全学生を受け入れ可能であるとする．学生，学校の選好順序は以下のように設定する．

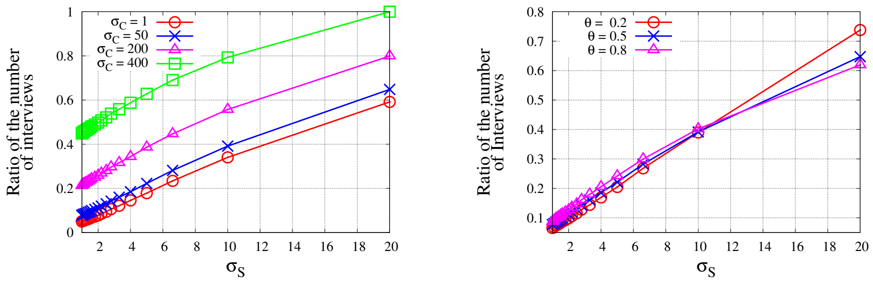
学生の選好　各学生 s に対して，Mallows モデル [8] を用いて潜在選好 $\succ_s$ を生成する．Mallows モデルはパラメータ $\theta(\geq 0)$ を持ち，θ が大きいほど学生同士の潜在選好の相関は強くなる．$\theta = 0$ のとき，学生の潜在選好は一様分布に従う．次に，全学生で共通の分割数 d を定め，$\succ_s$ をランダムに d 分割して部分選好 p_s を生成する．このとき，各学生の p_s 内の同格クラスに含まれる学校数の平均を $\sigma_S = m/d$ とする．

学校の選好　全学生の順序をランダムに生成する．次に，分割数 e を定め，生成した順序を e 等分したものを，各学校の部分選好として与える．すなわち，すべての学校は共通の部分選好を持つため，p_C は整合性を満たす．各学校は，与えられた p_c 内の同格クラスに含まれる学生をランダムに順序付けて潜在選好 $\succ_c$ とする．このとき，各学校の p_c 内の同格クラスに含まれる学生数の平均を $\sigma_C = n/e$ とする．

上記の設定の下で，全学生が全学校にインタビューを行う場合，すなわち $n \cdot m(= 8000)$ 回のインタビューを行う場合と比較して，LGS が行うインタビュー数の割合を求める．ただし，LGS は慎重なポリシーを実行するため，各学生は少なくとも 1 回のインタビューを行う．したがって，割合の最小値は 0.05 となる．各パラメータ設定に対して 100 個の問題のインスタンスを生成し，インタビュー数の割合の平均を求める．

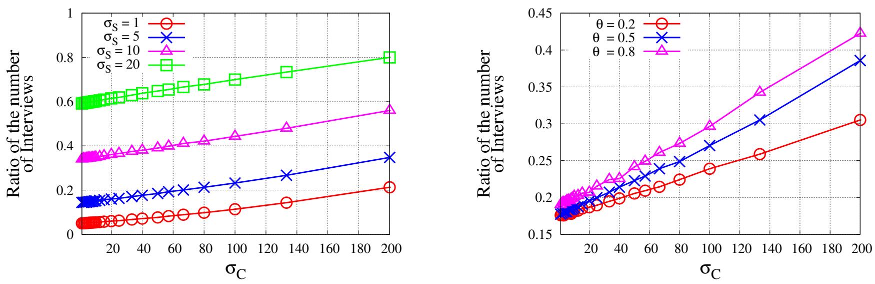
図 1 に，横軸を σ_S，縦軸をインタビュー数の割合とした結果を示す．図 1 (a) は，$\theta = 0.5$ とし，σ_S による影響を比較している．いかなる σ_C の値に対しても，σ_S が増加するとインタビュー数の割合も増加する．したがって，選好に関する情報を学生が多く持たない場合，LGS がより多くのインタビューを要求することが分かる．図 1 (b) は，$\sigma_C = 50$ とし，θ による影響を比較している．θ による有意な差はないため，学生の選好の相関がインタビュー数に与える影響は少ないと考えられる．

次に，図 2 に，横軸を σ_C，縦軸をインタビュー数の割合とした結果を示す．図 2 (a) は，$\theta = 0.5$ とし，σ_C による影響を比較している．図 1 (a) と同様に，学校が持つ，選好に関する情報が少ないほど，多くのインタビューが要求されることが分かる．図 1 (b) は，$\sigma_S = 5$ とし，θ による影響を比較している．σ_C が小さいとき，θ による有意な差は見られないが，σ_C が増加すると θ が大きいほど多くのインタビューを要求することが分かる．これは，学校が多くの情報を持たず，学生同士の順序付けが困難な状況では，学生同士の選好が類



(a) σ_C による影響 ($\theta = 0.5$)　　(b) θ による影響 ($\sigma_C = 50$)

図 1: σ_S の変化に伴うインタビュー数の割合の変化



(a) σ_S による影響 ($\theta = 0.5$)　　(b) θ による影響 ($\sigma_S = 5$)

図 2: σ_C の変化に伴うインタビュー数の割合の変化

似すると特定の学校に申し込みが集中し，結果として拒否する学生数も増加するためであると考えられる．

6　結論

本論文では，部分的な選好下での多対一マッチング問題を考察し，各エージェントが潜在的に持つ選好をインタビューにより明らかにすることで．学生最適なマッチングを求める LGS を新たに提案した．また，インタビューを行う回数を必要最小限にするために，学校側の部分選好に関する既存の仮定を一般化した整合性を提案し，その下でインタビュー回数を最小にすることを示した．

今後の課題としては，インタビュー数の最小化に関する整合性の特徴付けや，より現実に即した形式のインタビューのモデル化と，その下でインタビュー数を最小化するメカニズムの考察などが挙げられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP17H00761 および 17H04695 の助成を受けたものです．深く感謝いたします．

参考文献

[1] Haris Aziz, Péter Biró, Tamás Fleiner, Serge Gaspers, Ronald de Haan, Nicholas Mattei, and Baharak Rastegari. Stable matching with uncertain pairwise preferences. In *Proc. AAMAS-2017*, pages 344–352, 2017.

[2] Fuhito Kojima, Akihisa Tamura, and Makoto Yokoo. Designing matching mechanisms under constraints: An approach from discrete convex analysis. *Journal of Economic Theory*, Vol. 176, pp. 803–833, 2018.

[3] Masahiro Goto, Fuhiko Kojima, Ryoji Kurata, Akihisa Tamura, and Makoto Yokoo. Designing matching mechanisms under general distributional constraints. *American Economic Journal: Microeconomics*, 9(2):226–62, 2017.

[4] Ryoji Kurata, Naoto Hamada, Atsushi Iwasaki, and Makoto Yokoo. Controlled school choice with soft bounds and overlapping types. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 58:153–184, 2017.

[5] Joanna Drummond and Craig Boutilier. Preference elicitation and interview minimization in stable matchings. In *Proc. AAAI-2014*, pp. 645–653, 2014.

[6] David Gale and Lloyd Stowell Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[7] Baharak Rastegari, Anne Condon, Nicole Immorlica, and Kevin Leyton-Brown. Two-sided matching with partial information. In *Proc. EC-2013*, pages 733–750, 2013.

[8] JD Tubbs. Distance based binary matching. In *Computing Science and Statistics*, pages 548–550, 1992.