

2E-3-04 シンプレクティック・レイ・トレーシングによる ブラックホールの可視化

佐藤哲

岩佐英彦

竹村治雄

横矢直和

奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

1 はじめに

現代物理学においても先端的な話題であるブラックホール [1] は、その神秘的な名称や特徴のある性質から専門家に限らず一般の人々の関心も高い。しかし、ブラックホールを理解するためには難解な一般相対論を学ばねばならず、物理学を専門としない人にとっては負担が大きい。ところが近年、可視化技術の発展により、ブラックホールが存在する光景の CG 画像を正確に作成して視覚に訴えることにより、専門家でない人でもブラックホールの振る舞いや性質を直感的に理解することが可能となってきた [2]。

物理学の初学者にブラックホールを理解させることを可視化の目的とすると、可視化結果は実際の観測結果と矛盾しない、忠実で正確な画像である必要がある。ただし、ブラックホールの観測技術は確立されていないので、少なくとも理論的背景である一般相対論に忠実である必要がある。

このような目的のためのブラックホールの可視化研究は、山下の手法 [3] が提案されて以来、重力場光線追跡法あるいはブラックホールのレイ・トレーシングと呼ばれて研究されてきた [4][5]。重力場光線追跡法は、一般に広く使われている CG 作成技法であるレイ・トレーシング法 [6] を拡張したもので、直進する光線に限らず、ブラックホールの影響を受けて曲進する光線の軌跡を計算して追跡し、CG 画像を生成しようとするものである。これらの手法では、測地線の方程式と呼ばれる微分方程式を解くことによって光線の軌跡を求めている。

従来の手法では測地線の微分方程式を Runge-Kutta 法などで数値的に解くのが一般的であるが、数値解析法の種類によって程度は異なるものの、必ず計算の過程で打ち切り誤差が発生する。そしてブラックホールの存在する宇宙空間で長い間光線の追跡をしていると、その誤差が蓄積し、可視化結果が理論に忠実なものではなくなってしまうという問題が生じる。

そこで本報告では、測地線の微分方程式を解くの

ではなく、光線の運動に関する情報を含むハミルトニアンと呼ばれる物理量を使うハミルトンの正準方程式を解くことによって光線の軌跡を計算するシンプレクティック・レイ・トレーシング法を提案する。ハミルトンの正準方程式は、シンプレクティック数値解析 [7] を用いることにより蓄積誤差を発生させずに数値的に解けることが知られている。提案手法はその性質を利用することで、相対論に忠実にブラックホールを可視化する。

シンプレクティック・レイ・トレーシングを用いるためには、可視化対象とするブラックホールに対するハミルトニアンが必要となる。本論文では従来研究において可視化例が報告されているいくつかのブラックホールに対するハミルトニアンを示し、その可視化例を示す。

2 ブラックホールの可視化

ブラックホールの可視化手法においては、ブラックホールが時空を歪ませるという性質に着目して、ブラックホールが存在する時空にいくつかのオブジェクトを配置し、そのオブジェクトがどのように歪んで観測されるかによって、間接的にブラックホールを表現するのが一般的である。そして観測画像の作成には、物体から発せられた光線がどのように観測者の視点に入るかを調べるレイ・トレーシング法が採用される。

一般相対論によると、ブラックホールの存在は時空を歪ませる。するとその影響で、地球上では直進する性質のある光線も、曲がって進むことがある。そのため、ブラックホールの可視化には通常のレイ・トレーシング法をそのまま適用することはできず、曲がって進む光線の動きを計算して追跡するように拡張する必要がある。

従来のブラックホールの可視化研究においては、光線の軌道は直線概念を拡張した微分幾何学の概念である測地線の微分方程式を解くことによって計算される。測地線の微分方程式である 2 階の非線形微分方程式は、Runge-Kutta 型の数値解法によって解くことができるが、計算速度を上げるために差分の刻み幅を大きくすると数値計算の誤差が大きくなる。そして刻み幅を小さくすると打ち切り誤差は小さくなり真の解に近づくが、それでも計算時間が増

Visualization of Blackholes by Symplectic Raytracing

Tetsu Satoh, Hidehiko Iwasa, Haruo Takemura, and Naokazu Yokoya

Nara Institute of Science and Technology (NAIST)

8916-5 Takayama, Ikoma, Nara 630-0101, Japan

加するに従って計算機の数値の内部表現の影響で丸め誤差が蓄積されるという問題がある [8]。この問題は、Runge-Kutta 法に限らず測地線の微分方程式を計算する限り必ず発生する。ブラックホール近傍のように時空の歪みが急激に変化するような場合、光線を追跡していると、わずかな計算誤差によって光線が理論とは全く異なる方向に進んでしまうことが十分考えられ、このような手法では作成された CG 画像の信頼性が失われてしまう。

そこで本研究では、これまで可視化対象とされてきたブラックホール時空での光線の運動は、測地線の方程式でなくともハミルトンの正準方程式によって記述可能であるという点に注目する。ハミルトンの正準方程式は、ハミルトニアンという量を微分することによって構成される一階の微分方程式である。ハミルトンの正準方程式を用いることの大きな利点の一つは、ハミルトンの正準方程式に対しては誤差を蓄積させずに解くことができるシンプレクティック数値解析という手法が存在するということが挙げられる。本報告では、ブラックホール時空での光線の軌道を表すことの出来るハミルトニアンを導き、ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析を使って解いて光線の運動を計算し、その結果をレンダリングすることによってブラックホールを可視化するシンプレクティック・レイ・トレーシング法を提案する。

3 ハミルトン力学とシンプレクティック数値解析

本節では、シンプレクティック・レイ・トレーシングを説明するために必要なハミルトン力学とシンプレクティック数値解析について述べる。ハミルトン力学 [9] では、位置を示す座標は通常の $x-y-z$ 座標系である必要はなく、極座標系 (r, θ, ϕ) を用いても、ある地点からの距離 (s, l, p) を用いてもかまわないので、これらをまとめて一般化座標 $q_i (1 \leq i \leq n)$ として扱う。座標成分に対応する運動量は $p_i (1 \leq i \leq n)$ とする。ハミルトン力学は、この (p_i, q_i) を用いた $2n$ 個の成分より構成される $2n$ 次元の位相空間内で物体の運動を捉えるのが特徴である。

ハミルトン力学においてニュートンの運動方程式に対応するような基礎方程式は、次のハミルトンの正準方程式である。

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (1)$$

ここで H はハミルトニアンと呼ばれるスカラー関数で、 p 、 q 、及び時間 t の関数である。

式 (1) より分かるように、物体の時間変化による運動は全てハミルトニアン H によって決まる。物理的にはハミルトニアン H は系全体のエネルギーを意味し、例えばハミルトニアン H が時間と共に変化しない、つまりパラメータとして時間 t を含まないとき、ハミルトニアンは不変となり力学的エネルギー保存の法則を意味する。

ハミルトンの正準方程式に対しては、シンプレクティック数値解析という有効な数値解析法が存在することが知られている。シンプレクティック数値解析は、次式で定義されるシンプレクティック性の保存を保証する手法である：

$$\sum dp_i(t) \wedge dq_i(t) = \sum dp_i(t + \Delta t) \wedge dq_i(t + \Delta t) \quad (2)$$

この定義の意味は、ハミルトンの正準方程式 (1) の時間発展

$$(q(t), p(t)) \rightarrow (q(t + \Delta t), p(t + \Delta t)) \quad (3)$$

に対し、エネルギーが一定の物理現象については、数値解析上もエネルギーを一定に保つということである。逆に言うと、通常の、例えば Runge-Kutta 法ではシンプレクティック性を保存しないので、エネルギーが一定であるべき現象の数値解析をしても、エネルギーが無限に増大したり減少したりするなどの現象が理論的に起こる、ということである。Runge-Kutta 法などの場合、一般に

$$\sum dp_i(t) \wedge dq_i(t) = \sum f(q, p) dp_i(t + \Delta t) \wedge dq_i(t + \Delta t) \quad (4)$$

となり、 $2n$ 次元位相空間内での面積素 $dp \wedge dq$ が $f(q, p)$ 倍になる。この $f(q, p)$ は、数値解法の打ち切り誤差のオーダーによって決まる定数である。この結果はリュウビルの体積不変の定理 [9] に反することを意味し、物理法則に対し忠実な結果を表さない。

4 シンプレクティック・レイ・トレーシング

4.1 処理手順

本節では、与えられたブラックホールに対するハミルトニアンを使ったシンプレクティック数値解析に基づいて光線の軌跡を求め、ブラックホールを可視化するシンプレクティック・レイ・トレーシングの手法を提案する。まずシンプレクティック・レイ・トレーシングの処理の概略を図 1 に示す。入力されたハミルトニアンに対してシンプレクティック性を保存したまま、配置オブジェクトに光線が衝突するかブラックホールに吸い込まれるまで光線の軌道の数値計算を繰り返す。以下に、シンプレクティック・レイ・トレーシングの具体的なアルゴリズムを示す。

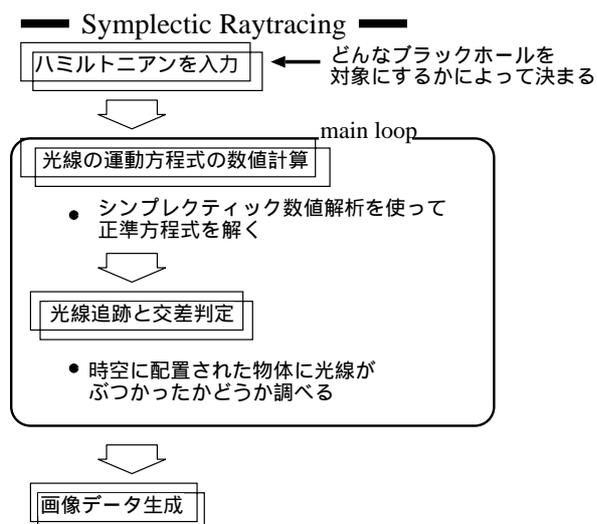


図 1: シンプレクティック・レイ・トレーシングの処理手順

- (1) 可視化対象にするブラックホールを決定し、そのために必要なハミルトニアンを選択する。
- (2) 観測方向を定め、それによりスクリーン座標系を設定する。
- (3) スクリーン上の点 (i, j) を見る視線ベクトルを計算する。
- (4) 視線ベクトルの方向に向けて、光線を発射する。
 - (4.1) ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析によって解き、現在の位相空間内の光線の位置 z_n から次の位置 z_{n+1} を求める。
 - (4.2) ハミルトニアン H の変化率があまりに急激だったり、あまりに長い間光線がどのオブジェクトにもぶつからなかった場合、光線はブラックホールに吸い込まれたか、宇宙の無限遠方に飛んでしまったと判断して、スクリーン上の点 (i, j) に黒をプロットして (3) に戻る。
 - (4.3) z から一般化座標成分を取り出した半直線 $q_{n+1}q_n$ が、オブジェクトの表面と交差していないかどうか調べる。交差していれば、その点のオブジェクトの色を調べて、スクリーン上の点 (i, j) に色をプロットする。交差していなければ、 $z_n \leftarrow z_{n+1}$ として、(4.1) に戻る。

以上の一連の手順のうち、(4) は発射される光線の数だけ実行される。光線同士は互いに他の光線の運動に干渉しないと仮定すると、この部分は並列に処理することができる。

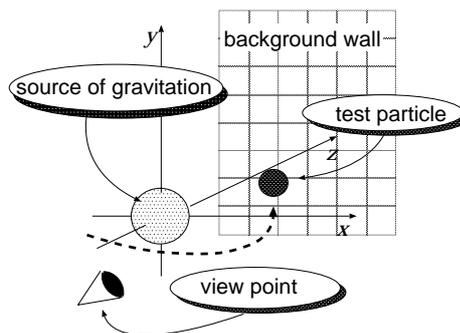


図 2: 設定する世界モデル

4.2 ハミルトンの正準方程式の数値解法

(4.1) のハミルトンの正準方程式に対するシンプレクティック数値解法は様々なものが提案されているが [10][11]、今回の本研究の実装では次のようなアルゴリズムを採用する。

$z = (p, q)$ 、 $f(z) = (-\partial H/\partial q_i, \partial H/\partial p_i)$ と置き、以下の計算をする。

$$k_1 = z_n + \tau \left(\frac{1}{4} f(k_1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f(k_2) \right)$$

$$k_2 = z_n + \tau \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) f(k_1) + \frac{1}{4} f(k_2) \right)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{\tau}{2} (f(k_1) + f(k_2))$$

ここで、 τ は刻み幅を表す定数である。この公式は k_1 、 k_2 について陰的なので、適当な回数だけ反復計算をする必要がある。ここに示した計算による $z_n \rightarrow z_{n+1}$ という写像はシンプレクティック性を保存することが、直接計算により容易に証明できる [12]。また、打ち切り誤差は 4 次のオーダーである。

一般に、ブラックホール時空での光線の運動を表すハミルトニアンは時間的に不変となるので、数値計算結果からハミルトニアンを計算し、初期値からどの程度ずれているか調べることによって数値計算の局所誤差が計測できる。この処理は上記のアルゴリズムの (4.2) の部分に含まれている。

5 生成画像例

図 2 のように配置されたブラックホールとオブジェクトを、観測者の視点から見た光景の可視化結果を紹介する。本節で結果を紹介するブラックホールは、球対称ブラックホール [4][13][14][15]、軸対称ブラックホール [4][16] の 2 種類である。また、背景画像には NASA の Hubble Space Telescope Public Pictures のうち、Dust in Spiral Galaxies (<https://www.astr.ua.edu/keel/research/dust.html>)

を用いた．ブラックホールの近傍に配置する球オブジェクト（テスト粒子）の表面には、地球の温度分布を表した画像データをマッピングする．以下、座標系は4次元極座標系 (t, r, θ, ϕ) を使用する．

まず、比較のためにブラックホールが存在しない時空で光線追跡をした結果が図3である．この場合、ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_t^2}{2} - \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r^2} \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{p_\phi^2}{2} \quad (5)$$

となる．

次に球対称のブラックホールを配置した例が図4である．ハミルトニアンは次のものを使用すれば実現できる．

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (6)$$

r_g は質量を表すパラメータで、図4においては $r_g = 0.2$ と設定した．中央部の黒い部分がブラックホールである．ブラックホール周囲の画像は歪んでおり、重力レンズ効果が確認できる．

質量の他に、一定速度で回転している軸対称のブラックホールを配置した例が図5である．回転の軸は鉛直方向になっている．この場合のハミルトニアンは次のものである．

$$H = \left(1 + \frac{r_g r (a^2 + r^2)}{\rho^2 \Delta}\right) \frac{p_t^2}{2} - \frac{\Delta}{\rho^2} \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{p_\theta^2}{2} - \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \frac{p_\phi^2}{2} + \frac{a r_g r}{\rho^2 \Delta} p_t p_\phi \quad (7)$$

ここで、 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ 、 $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$ 、 a は角運動量に相当するパラメータである．図5においては $a = 0.5$ と設定した．また、このハミルトニアンは、電荷を表すパラメータ e を用いて $\Delta = r^2 - r_g r + a^2 + e^2$ と定義し直すことにより、電荷を持つブラックホールにも拡張できる．星が崩壊してブラックホールになる場合、途中の過程は複雑であるが最終的には質量と角運動量と電荷だけをパラメータとして持つことが知られており [17]、このハミルトニアンで大抵のブラックホールは扱うことができる．

図3によると明るい銀河が二つ存在するが、図5では様相が変わっている．ブラックホール周囲の光の輪には左下と右上に塊があり、実はこの二つは同じ銀河である．また非常に小さいがブラックホールの左上に小さな光の塊があり、これは画像中右下の銀河と同一のものである．このように2重に観測されるのは、重力レンズ効果の典型的な例である．

図5でも回転の影響は現れているが、さらに調べるために軸対称ブラックホールを上から観測したのが図6である．球オブジェクトが時計回り方向に引きずられるように伸びていることから、ブラックホールの回転方向が分かる．

6 おわりに

本報告で提案した手法「シンプレクティック・レイ・トレーシング」は、(1) ブラックホール時空をハミルトン力学によりモデル化し、(2) シンプレクティック数値解法により光線の運動方程式を解き、(3) 光線追跡法によりCGを作成することを達成した．ハミルトン力学による定式化により、誤差の蓄積が理論的に発生しないシンプレクティック数値解析を使用できるようになり、結果的には測地線の計算をするより数式も簡単になった．

しかしまだ本手法には多くの改良課題が残されている．まず、刻み幅が一定のシンプレクティック数値解法に対し、もし刻み幅が時空の曲率によって変化させられる解法を構成できれば、かなりの高速化につながる．現在のところシンプレクティック性を保存しながら刻み幅を変化させる手法の開発には成功していない [18]．また、計算結果の可視化に工夫が少なく、写実的ではあるがコンピュータによる可視化としては情報量が少ないと言わざるを得ない．例えば、空間の歪み具合をボリュームレンダリングで示すなどの可視化手法としての工夫が必要である．

参考文献

- [1] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., 1973.
- [2] F.E. Hehl, R.A. Puntigam, and H. Ruder (Eds). *Relativity and Scientific Computing*. Springer-Verlag, 1996.
- [3] 山下義行. ブラック・ホールのコンピュータグラフィックス:光線追跡法の曲がった4次元時空への拡張. 情処学論, Vol.30, No.5, pp.642-651, 1989.
- [4] 山下義行. 相対性理論のコンピュータグラフィックス. 日本物理学会誌, Vol.53, No.11, pp.819-825, 1998.
- [5] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和. 物体の相対論的運動の重力場光線追跡法による可視化. 信学技報 IE95-126, 1996.
- [6] T.Whitted. An Improved Illumination Model for Shaded Display. *Commun. ACM*, Vol.23, No.6, pp.343-349, 1980.

- [7] H. Yoshida. Recent progress in the theory and application of symplectic integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.56, pp. 27–43, 1993.
- [8] H. Kinoshita, H. Yoshida, and H. Nakai. Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.50, pp. 59–71, 1991.
- [9] 山本義隆, 中村孔一. 解析力学I. 朝倉書店, 1998.
- [10] F. Kang and Q. Meng-zhao. The symplectic methods for the computation of hamiltonian equations. *Lecture notes in mathematics*, Vol. 1297, pp.1–37, 1987.
- [11] 吉田 晴夫他. 古典力学の輝き. 数理科学, Vol.33, No.6, 1995.
- [12] J.M. Sanz-Serna. Symplectic intergrators for hamiltonian problems: an overview. *Acta Numerica*, pp.243–286, 1991.
- [13] 佐藤哲. Regge Calculus による重力場方程式の数値計算と重力場光線追跡法. 修士論文, NAIST-IS-MT9451049, 奈良先端大, 1996.
- [14] H.P. Nollert, U. Kraus, and H. Ruder. *Relativity and Scientific Computing*, chapter 16 (Visualization in Curved Spacetimes. I. Visualization of Objects via Four-Dimensional Ray-Tracing). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [15] S. Bryson. Virtual spacetime: An environment for the visualization of curved spacetimes via geodesic flows. In *Proc. Visualization'92*, pp.291–298, 1992.
- [16] B.M. Jensen. Null geodesics around a Kerr Black Hole.
<http://www.astro.ku.dk/~milvang/RelViz/>, 1996.
- [17] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.
- [18] J.J. Biesiadecki and R.D. Skeel. Dangers of multiple time step methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 109, pp.318–328, 1993.

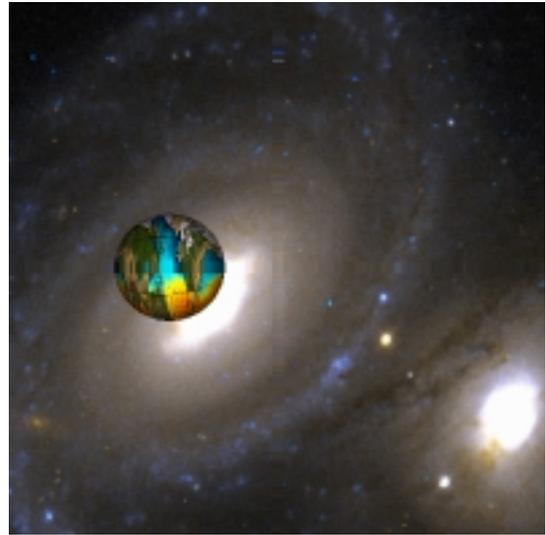


図 3: ブラックホールが存在しない平坦な時空。



図 4: 球対称ブラックホールを正面から観測した場合。中央部の黒い部分にブラックホールが存在する。

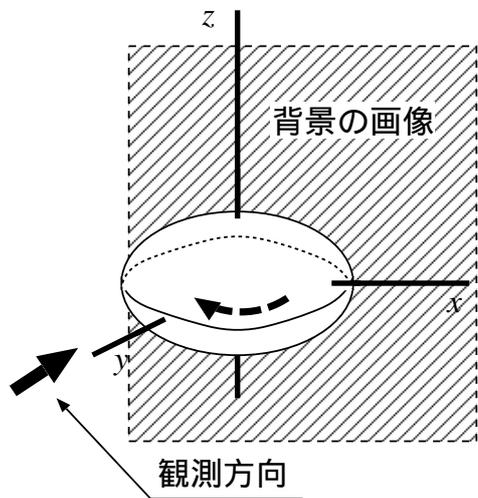


図 5: 軸対称ブラックホールを正面から観測した場合。画像の鉛直方向にブラックホールの軸がある。

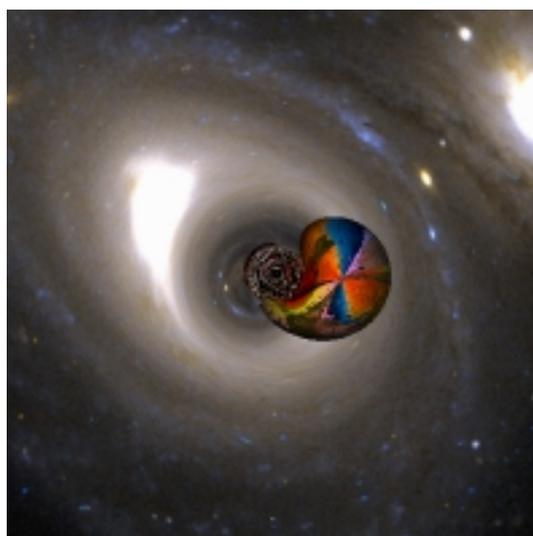
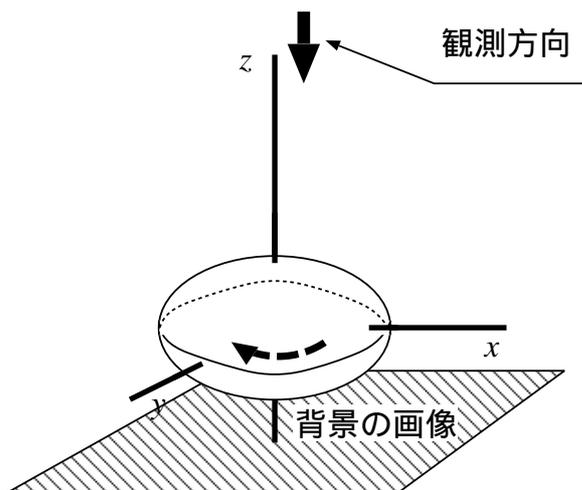


図 6: 軸対称ブラックホールを上から観測した場合。観測者はブラックホールの軸上に存在する。